

# Lesson Study *em* MATEMÁTICA



## Peixes para contar e estimar

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza

Julia Schaetzle Wrobel

Hellen Castro Almeida Leite

Bruna Lution Valle Prane

Vanessa Ribeiro Gaigher

**Peixes para contar e estimar**

***Série Lesson Study em Matemática - Nº 02***

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza  
Julia Schaetzle Wrobel  
Hellen Castro Almeida Leite  
Bruna Zution Dalle Prane  
Vanessa Ribeiro Gaigher

**Peixes para contar e estimar**  
**Série *Lesson Study* em Matemática – Nº 02**



**Edifes**



**Edifes**  
Editora do Ifes

Editora do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Espírito Santo  
R. Barão de Mauá, nº 30 – Jucutuquara  
29040-689 – Vitória – ES  
www.edifes.ifes.edu.br  
editora@ifes.edu.br

#### **Instituto Federal do Espírito Santo**

Reitor: Jadir Jose Pela  
Pró-Reitor de Administração e Orçamento:  
Lezi José Ferreira  
Pró-Reitor de Desenvolvimento Institucional:  
Luciano de Oliveira Toledo  
Pró-Reitora de Ensino: Adriana Piontkovsky  
Barcellos  
Pró-Reitor de Extensão: Renato Tannure  
Rotta de Almeida  
Pró-Reitor de Pesquisa e Pós-Graduação:  
André Romero da Silva

#### **Coordenadoras da Série Lesson Study em Matemática**

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza  
Julia Schaeztle Wrobel

#### **Editoração Eletrônica**

Editora do Ifes

#### **Universidade Federal do Espírito Santo**

Reitor: Reinaldo Centoducatte

#### **Comitê Científico**

Dr. Arthur Powell - Rutgers University - USA  
Dr. Henrique Manuel Guimarães -  
Universidade de Lisboa - Portugal  
Dr. João Pedro da Ponte - Universidade de  
Lisboa - Portugal  
Dra. Roberta D'Ángela M. Bortoloti -  
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia -  
Brasil  
Dr. Victor Giraldo - Universidade Federal do  
Rio de Janeiro - Brasil  
Dra. Yuriko Yamamoto Baldin - Universidade  
Federal de São Carlos - Brasil

Revisão textual: Thaís Rosário da Silveira  
Diagramação: Beatriz Pessanha Moreira de Souza  
Imagem da capa: Coordenadoria Geral de  
Tecnologias Educacionais do Cefor - Ifes

---

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação  
Bibliotecária Rossanna dos Santos Santana Rubim – CRB6- ES 403

---

p379 Peixes para contar e estimar / Maria Alice Veiga Ferreira de Souza... [et al.] –  
Vitória, ES : Edifes, 2018.  
114 p. ; il. – (Lesson study em Matemática ; v. 2).

Vários autores.  
ISBN: 978-85-8263-380-9 (e-book).

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – Resolução de problemas.  
3. Professores – Formação. I. Souza, Maria Alice Veiga Ferreira. II. Wrobel, Julia  
Schaeztle. III. Leite, Hellen Castro Almeida. IV. Prane, Bruna Zution Dalle. V.  
Gaigher, Vanessa Ribeiro. VI. Título.

CDD 22 – 510.7

---

Copyright @ 2018 by Instituto Federal do Espírito Santo  
Depósito legal na Biblioteca Nacional conforme Decreto No. 1.825 de 20 de dezembro de  
1907. O conteúdo dos textos é de inteira responsabilidade dos respectivos autores.  
Material público para livre reprodução, desde que se faça referência à fonte e às autoras.

DOI: 10.36524/9788582633809

*Educação, não há nada maior no mundo. A educação moral de uma pessoa se estende a 10 mil pessoas. A educação de uma geração se expande por uma centena de gerações.*

*Jigoro Kano*

## **Agradecimentos**

A consumação deste livro, que é o segundo da série *Lesson Study* em Matemática, só foi possível pela participação, envolvimento e dedicação de várias pessoas, cada qual a seu modo e revestindo-se em diferentes papéis e frentes. É para elas que direcionamos nossos sinceros agradecimentos, que correm mais especificamente a seguir.

Aos 17 professores de Matemática da Prefeitura Municipal da Serra pela disposição e interesse em novas maneiras de lidar com o ensino da Matemática, apesar dos obstáculos de diferentes ordens impostos em nosso país: Adenilda Maria dos Santos Silva, Aline Tavares Soares, Célia Patrocínio Pinto, Cristine Bittencourt Castelano Rocha, Glaucon dos Anjos Werly, Iraci Cândida Pereira, Jean Carlos Grugiki, Luiz Felipe Afonso Melo, Maria Alvani Mangelsen, Maria Aparecida Moreira, Maria do Carmo Almeida Silva, Marlene de Oliveira Mendes, Orias Alves Vieira Junior, Patrícia Varejão Gobbi, Paulo Cezar Domingos, Rúbia Cristina Nascimento Sobrinho Rocio, Vanessa Rocha Gomes.

À equipe do Centro de Formação “Prof. Pedro Valadão Perez” por acreditar em nosso trabalho e providenciar a infraestrutura para o planejamento da aula, além de incentivar os professores da rede municipal da Serra, em especial à Profa. Maria do Socorro de Souza Marques (Gerente de Formação), Profa. Denise Silva Tomasi da Rocha (Assessora Pedagógica de Ciências), Márcia Lamas (Secretária de Educação) e Audifax Charles Pimentel Barcelos (Prefeito do Município da Serra).

À Carini M. C. Del Pupo (Diretora da EMEF Américo Guimarães Costa), Aldo Mattos Sant’Ana Filho (Pedagogo da EMEF Américo Guimarães Costa), Munira Masruha Bortolini (Coordenadora da EMEF Américo Guimarães Costa) e Marcos Henrique Bastos da Silva (Professor da EMEF Américo Guimarães Costa) por abrirem gentilmente as portas para a aplicação da aula, e aos vinte alunos que aceitaram o desafio apresentado pelo problema dos **Peixes para Contar e Estimar**.

Aos colegas da Comissão Científica pelas valiosas contribuições para o enriquecimento do livro.

Finalmente, ao Ifes e à Ufes por acreditarem em nosso potencial como profissionais e nos apoiarem a fazer sempre mais e melhor pela educação matemática brasileira.

Muito obrigada!

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza  
Julia Schaetzle Wrobel  
Hellen Castro Almeida Leite  
Bruna Zution Dalle Prane  
Vanessa Ribeiro Gaigher

## Prefácio

As escolas devem tornar-se lugares onde os professores, não apenas os alunos, aprendam.  
(Stiegler e Hiebert, 2009)

“**Peixes para Contar e Estimar**” é o segundo número da série de livros *Lesson Study* em Matemática, em boa hora iniciada há cerca de um ano com “Café, leite e Matemática”, pela mão de suas coordenadoras Maria Alice Ferreira de Souza e Julia Schaetzle Wrobel.

Como é dito na apresentação da série, ela é lançada com o propósito principal de dar a conhecer práticas de sala de aula preparadas e realizadas de acordo com os princípios e orientações de uma abordagem na formação de professores conhecida por *Lesson Study* (Estudo de aula), tal como foi desenvolvida no Japão (Lewis, 2000). Esta abordagem, cuja origem neste país remonta ao séc. XIX (Makinae, 2010; Isoda, 2010), começou a ganhar visibilidade e a merecer maior interesse sobretudo a partir do final dos anos 90 do século passado nos EUA (Fernandez, 2002), e é hoje conhecida e usada em muitos

países – também em Portugal (Quadrante, 2017) e no Brasil, país onde esta série de livros irá certamente ser de boa utilidade.

Na linha de “Café, leite e Matemática”, ressaltam na experiência que nos é dada a conhecer neste segundo livro algumas ideias centrais de base no seu desenvolvimento: o conhecimento do professor como um conhecimento que fundamentalmente se revela e se desenvolve nas situações da prática profissional; a reflexão sobre a (própria) prática como requisito para o crescimento e aperfeiçoamento desse conhecimento; o trabalho colaborativo entre professores e entre professores e investigadores como ambiente e práxis propícios e motivadores dessa reflexão e conhecimento; a resolução de problemas como orientação curricular mestra para o ensino da Matemática e ingrediente fundamental nas práticas de sala de aula.

São assim convocadas e combinadas ideias sobre o professor como um prático reflexivo e sobre o conhecimento-na-acção e reflexão na e sobre a acção (Schön, 1991), bem como sobre conhecimento do professor como um conhecimento essencialmente de natureza experiencial e situado (Fenstermacher, 1994; Elbaz, 1983), particularmente no que se refere ao conhecimento pedagógico do conteúdo – essa “mistura especial de conteúdo e pedagogia” como lhe chama Shulman (1987), que é, como também este autor diz, “unicamente província dos professores, a sua forma especial própria de conhecimento profissional”. Valoriza-se deste modo, com esta série de livros, a escola como lugar de aprendizagem dos professores, a prática dos professores como fonte de conhecimento e os professores como produtores desse conhecimento. Deste modo também se resiste e contraria a ideia de que os professores são meros reprodutores, meros veículos de um conhecimento que lhes é exterior. Sublinho a este

propósito, como também se dá nota no texto de apresentação da série, que o que se espera com as experiências que cada livro relata é que sirvam de estopim, “de ponto de partida”, como é dito, para as acções dos professores “deixando a carga de sua criatividade e experiência, avanços do que for apresentado”.

Por sua vez, como já referi, abraça-se a resolução de problemas como elemento integrante da prática de sala de aula, tida como componente essencial na abordagem didáctica do professor e na actividade a desenvolver pelos alunos, assumindo o desenvolvimento da sua experiência matemática como uma dimensão relevante da aprendizagem na disciplina. A matemática, diz-nos Polya (1967), “não é um desporto para espectadores, não a podemos apreciar, nem aprender sem uma participação activa” – se é possível transmitir certo tipo de conhecimentos matemáticos, informação matemática por exemplo, a experiência matemática é radicalmente intransmissível. Ou seja, sem um efectivo envolvimento e participação dos alunos na realização de actividades genuinamente matemáticas, com autonomia e compreensão, fica de fora da sua aprendizagem uma boa parte da matemática, e muito limitada a possibilidade de poderem vir a dar-lhe valor ou a gostar dela.

A seguir à apresentação do problema seleccionado para o trabalho em aula e das premissas sobre a resolução de problemas para o desenvolvimento desse trabalho, apresenta-se no livro, em secção própria, a descrição de “como e onde tudo aconteceu”. Ficámos então a saber que a experiência relatada se destinava à formação continuada de professores de Matemática envolvendo docentes do Ensino Fundamental, todos da mesma região do estado do Espírito Santo, e investigadoras (as autoras do livro), também professoras dessa disciplina. É assim constituído o grupo colaborativo para levar a cabo a experiência

- de formação e de ensino - cujo objectivo era contribuir para a melhoria de “práticas de ensino em aulas de resolução de problemas”, tendo em vista, nos alunos, o desenvolvimento das “suas compreensões textuais, ampliação do reportório de estratégias, interação entre alunos e aluno-professor”. Ficámos então também a saber, e quero sublinhar isto, que esta formação teve lugar no quadro de uma parceria entre as instituições das investigadoras e o Centro de Formação do Município a que pertencem os professores participantes, o que possibilitou, como nos é dito, que os professores, para efeitos da formação, pudessem deixar as suas aulas num dia por semana - sinal a meu ver evidente, de um lado e de outro, da valorização da formação e da experiência que a visava. Quero também dar realce à perspectiva adoptada para a concretização desta experiência, na ênfase que deu - na formação e no ensino - à articulação entre teoria e prática e entre execução e reflexão, bem como ao facto de ela ter decorrido em “ambiente natural da formação e de sala de aula”.

O corpo principal do livro organiza-se em três secções, incorporando as etapas de um *Lesson Study*, tal como hoje é praticado na formação de professores - “O planeamento colaborativo” (Planificação), “A aula” (Execução) e “O que deu certo... o que não deu certo... Um balanço final” (Reflexão) - procurando sempre apresentar o resultado do que também foi uma pesquisa, como é assumido pelas coordenadoras da série, em “linguagem própria da sala aula”. Esta preocupação, diga-se, é logo bem visível no título que identifica o livro e dá nome ao problema escolhido, como também é na descrição dos encontros de formação para o planeamento colaborativo e da realização da aula com base nesse planeamento. Num caso e noutro, o texto tem uma forte componente narrativa, ricamente urdida com trechos de falas dos professores, com imagens das

produções escritas dos intervenientes na realização da tarefa proposta, e com observações e comentários dos observadores-autores do livro. Para além disso, é generosa a ilustração com fotografias, quer das sessões de trabalho do grupo de formação – incluindo aspectos da ‘aula piloto’, simulação efectuada pela professora escolhida para a intervenção lectiva que iria realizar na sua turma de 8º ano – quer da aula leccionada, com uma interessante selecção de momentos do trabalho em pequenos grupos, do registo na lousa de aspectos desse trabalho e da partilha das estratégias e resultados a que os alunos chegaram.

“**Peixes para Contar e Estimar**” dá-nos assim a apresentação vívida de um *Lesson Study* a partir de um problema, particularmente conseguida no que se refere à preparação da aula associada, em que são muitas as ocasiões em que nos deparamos com variados trechos que evidenciam o envolvimento e contributo dos professores nessa preparação – na enumeração dos necessários pré-requisitos matemáticos dos alunos, na análise do texto da formulação escrita do problema proposto, feita com muito cuidado e detalhe, na identificação de eventuais dificuldades dos alunos na interpretação desse texto e formas de as superar, na antecipação de possíveis estratégias de resolução do problema e sua discussão. Da realização da aula, é-nos dada uma descrição pautada por exemplos visuais e verbais das intervenções da professora, e por muitos recortes das produções escritas dos alunos, sempre acompanhados de comentários interpretativos que orientam a leitura desses recortes, clarificando o que os alunos escreveram e evidenciando os detalhes considerados mais significativos. Saliento ainda o momento de reflexão pós-aula e de balanço final onde são identificados aspectos problemáticos que sabemos frequentes na organização e monitorização de aulas, sobretudo, do tipo da que nos é relatada – o tempo e sua gestão,

a dificuldade dos alunos em trabalhar em grupo e em participar nas discussões colectivas, a orquestração destas discussões por parte do professor.

Por tudo isto, “**Peixes para Contar e Estimar**” é bem um “produto educacional” no ensino da Matemática, a um tempo testemunho motivador de possibilidades, acredito que mais promissoras neste ensino, mas também na formação de professores, e material de apoio e de trabalho para essa formação e para os professores no seu ofício de ensinar.

Henrique Manuel Guimarães  
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

### Referências

ELBAZ, F. *Teacher thinking, a study of practical knowledge*. Londres: Croom Helm, 1983.

FENSTERMACHER, G. *The knower and the known: the nature of knowledge in research on teaching*. *Review of Research in Education*, v. 20, p. 3-56, 1994.

FERNANDEZ, C. *Learning from Japanese approaches to professional development: The case of Lesson Study*. *Journal of Teacher Education*, v. 53 (5), p. 393-405, 2002.

ISODA, M. *Lesson Study: Problem solving approaches in mathematics education as a Japanese Experience*. *Procedia Social and Behavioral Sciences* 8, p. 17-27, 2010.

LEWIS, C. *Lesson Study: The Core of Japanese Professional Development*. *Invited Address to the Special Interest Group on Research in Mathematics Education*. AERA, New Orleans, April 28, 2000.

MAKINAE, N. *The Origin of Lesson Study in Japan*. In: *EARCOME5 proceedings - In the search of excellence on Mathematics Education*. Tokyo: JSME, 2010.

QUADRANTE. Estudos de aula em Matemática, v. XXVI, n. 2, 2010.

POLYA, G. *L'Enseignement par les problèmes. L'Enseignement Mathématique*, v. 17, p. 234-241, 1967.

SCHÖN, D. *The reflective practitioner: how professionals think in action*. Londres: Avebury, 1991.

SHULMAN, L. *Knowledge and teaching: Foundation of the new reform*. *Harvard Educational Review*, v. 57, n. 1, p. 1-23, 1987.

STIEGLER, J. E HIEBERT, J. *Closing the teaching gap*. *Phi Delta Kappan*, v. 91, n. 3, p. 32-37, 2009.

## Apresentação da Série

E tantos verbos de persuadir requerem os verbos de ousar. De provocar o sujeito a significar sua existência pela contraposição ao que está posto, de forma a atender as suas reais necessidades. Assumir insubmissões é assumir o direito à liberdade de pensar, de questionar, de buscar respostas...<sup>1</sup>

Nesse espírito de insubordinações criativas, proposto por D'Ambrósio e Lopes<sup>2</sup>, apresentamos a série *Lesson Study* em Matemática, motivadas pelo desejo de divulgar aulas de Matemática elaboradas sob as premissas do modelo japonês *Lesson Study* ou Estudo/Pesquisa de Aula na língua portuguesa<sup>3</sup>. Nossa opção pelo *Lesson Study* como fio condutor das ações de ensino e de seus impactos sobre a aprendizagem de estudantes não é incidental, mas pautada em seus reflexos em práticas

---

<sup>1</sup> D'Ambrósio; Lopes (2015a, p. 14-15).

<sup>2</sup> D'Ambrósio; Lopes (2015b).

<sup>3</sup> Optamos pela utilização do termo *Lesson Study*, em vez de Estudo/Pesquisa de Aula ou Jugyou Kenkyu, por sua ampla difusão no meio acadêmico-escolar-científico.

que vêm se mostrando potenciais para a aprendizagem em Matemática, evidenciados tanto em resultados apresentados pelo Japão em testes de larga escala e em pesquisas acadêmicas na área de Educação Matemática, como na própria experiência das organizadoras desta série.

Pretende-se difundir entre professores que ensinam matemática o resultado de aulas planejadas-executadas-refletidas que poderão funcionar como ponto de partida para suas próprias ações de ensino, deixando a cargo de sua criatividade e experiência avanços a partir do que for apresentado em cada volume da série. Desse modo, o professor poderá imprimir sua marca pessoal, uma vez que cada turma tem seu modo de ser e de sentir o mundo, seu contexto e sua história. Ademais, os livros podem ser utilizados em disciplinas específicas de licenciatura, de pós-graduações e em atividades de formação continuada em Ensino de Matemática.

Para além de um produto educacional em ensino, os livros da série *Lesson Study* são, em si, resultados de processos de investigação realizados em meio à prática profissional de professores, mas sobretudo com o cuidado de serem escritos com linguagem própria da sala de aula.

Por fim, destacamos que cada volume da série se apresenta independente, podendo ser lido e levado a efeito fora de ordem, conforme o interesse do leitor.

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza  
(alicevfs@gmail.com)  
Julia Schaetzle Wrobel  
(juliasw@gmail.com)

## Sumário

<i>Lesson Study</i> .....	18
O problema dos peixes para contar e estimar.....	24
Para iniciarmos nossa conversa.....	26
Como e onde tudo aconteceu.....	30
O Planejamento Colaborativo.....	36
DISCUSSÃO SOBRE AS ESTRATÉGIAS	
MATEMÁTICAS.....	38
COMPREENSÃO DO TEXTO DO PROBLEMA.....	52
O QUE OS ALUNOS DEVEM SABER PARA RESOLVER O	
PROBLEMA.....	55
PREPARATIVOS PARA A AULA.....	56
AVALIAÇÃO.....	58
AULA PILOTO MINISTRADA PELA PROFESSORA PARA O	
GRUPO DE PROFESSORES.....	60
DINÂMICA DA AULA.....	61
<b>Plano de aula</b> .....	<b>63</b>
<b>A aula</b> .....	<b>73</b>
AVALIAÇÃO.....	84
REFLEXÃO SOBRE O PLANEJAMENTO E A EXECUÇÃO.....	87
<b>Um balanço final</b> .....	<b>91</b>
<b>Sem limites</b> .....	<b>95</b>
<b>Referências</b> .....	<b>100</b>

## Lesson Study

*Lesson Study*<sup>4</sup> é um modelo japonês de estudo/pesquisa da prática do professor com o objetivo de potencializar a aprendizagem efetiva e participativa dos alunos. Também pode ser entendido como um modelo de formação de professores. Para isso, as aulas são elaboradas por um grupo de professores e gestores, de modo colaborativo, seguido de reflexão sobre a vivência. No Japão, a prática do *Lesson Study* atende, igualmente, a formação inicial e continuada de professores, com destaque para professores recém-formados que assumem, pela primeira vez, suas salas de aula e podem contar com a colaboração de colegas mais experientes<sup>5</sup>. Para além do Japão, a literatura acadêmica aponta a importância do trabalho docente colaborativo por meio de investigação, estudo e reflexão sobre a própria prática. Trocas de saberes e de experiências têm um papel central na aprendizagem profissional docente e, nesse sentido,

---

<sup>4</sup> Fernandez; Yoshida (2004), Takahashi (2006), Isoda; Olfos (2009), Fujii (2014), Souza; Wrobel; Baldin (no prelo).

<sup>5</sup> Para uma descrição detalhada do *Lesson Study* japonês, o leitor pode consultar Fernandez; Yoshida (2004).

o trabalho colaborativo apresenta-se como uma via importante para formação do professor que pode se refletir efetivamente na melhoria da aprendizagem dos alunos<sup>6</sup>. Por promover fortemente esse espírito de colaboração e reflexão, entendemos que o *Lesson Study* pode e deve se firmar como um modelo de ensino também no Brasil. É importante observar que o modelo original de *Lesson Study* pode ser situado nos aspectos culturais e sociais do contexto educacional japonês (incluindo a formação de professores e a própria escola), que é diferente do contexto educacional brasileiro. Portanto, o mais importante não é reproduzir o modelo com o compromisso de manter todos os detalhes como estes ocorreriam em uma escola japonesa, e sim entender a essência, os princípios e objetivos do *Lesson Study* e adaptar o modelo ao contexto brasileiro de forma que esses princípios sejam preservados e os objetivos atingidos<sup>7</sup>. Muito mais do que um roteiro de aula resultante no final dos diversos ciclos, o *Lesson Study* propicia a formação do professor. Sua participação na construção do roteiro pode lhe fornecer uma visão sobre como construir aulas por meio da colaboração com outros colegas e com base na observação de outras turmas.

Em sua essência, o *Lesson Study* é composto por três etapas<sup>8</sup>:

#### Etapa 1: Planejamento

Nesse primeiro momento, o grupo de professores se reúne para definir o conteúdo a ser abordado e o caminho que devem trilhar para alcançar os objetivos definidos, após cuidadoso estudo do currículo escolar. Diferentemente de um plano de aula

---

<sup>6</sup>Ferreira (2003), Fiorentini (2004), Miskulin et al. (2005), Ibiapina (2008), Baldin (2009), Cyrino; Caldeira (2011), Giraldo et al. (2017; 2018); Giraldo (2018).

<sup>7</sup>Giraldo et al. (2017).

<sup>8</sup>Autores como Ponte, Quaresma, Mata-Pereira e Baptista (2015) consideram quatro etapas, e não apenas três, sendo a identificação pelos professores de um problema relevante na aprendizagem dos alunos a primeira delas.

comum, burocrático, em que o professor descreve o conteúdo, objetivos gerais e específicos, procedimentos, recursos e avaliação, no *Lesson Study* o plano de aula é sempre criteriosamente elaborado, prevendo participação ativa dos alunos. Nesse sentido, o grupo discute as situações ou problemas que serão propostos no início da aula e se tal proposta é adequada ao contexto dos alunos. Há previsão dos questionamentos que devem ser realizados para conduzir o pensamento dos estudantes, bem como as respostas esperadas. Conhecimentos prévios são pensados, dificuldades epistemológicas e dúvidas são previstas e maneiras de lidar com cada uma delas são debatidas. É previsto também que os alunos vão à lousa apresentar e discutir suas estratégias e pensamentos com a turma e com o professor, considerando as múltiplas estratégias matemáticas e as possíveis conexões entre elas. Nesse momento, cada professor contribui com a sua experiência no assunto, suas leituras prévias e, ao final, produzem, conjuntamente, um plano de aula que descreve em detalhes o que acreditam ser o melhor para a(s) aula(s) que pretendem lecionar.

#### Etapa 2: Execução

O passo seguinte é a aula propriamente dita. Um dos professores executará as ações planejadas em sua própria classe sob a observação de todo o grupo, que não interfere durante o andamento da aula. Tendo o planejamento em mãos, como uma referência, os professores apenas observam e realizam anotações para posterior reflexão. Seus olhares concentram-se nas respostas, facilidades ou dificuldades dos alunos, nas atitudes do professor, na coerência entre o que foi discutido quando da construção do planejamento e a execução, além da necessidade de realização de novo planejamento para uma aula futura, considerando alterações importantes observadas durante a aula.

A execução da aula deve levar em conta a valorização da produção dos alunos, com o uso do erro como elemento favorável da construção do raciocínio pela turma. É importante que todos os alunos estejam engajados na discussão e solução do problema e que a aula seja conduzida em torno das ideias matemáticas, sem que o tempo seja consumido com questões irrelevantes ou que não promovam o desenvolvimento do pensamento matemático que os levem à solução do problema. Por fim, é importante realçar o cuidado com a organização da lousa, o compartilhamento de ideias pelos alunos e a síntese dessa produção matemática pelo professor.

É relevante destacar que o planejamento não deve ser visto como algo estático ou “engessado”. Ao contrário, ele apresenta o resultado dos debates realizados pelo grupo de professores que decidiu por realçar elementos que se espera explorar em sala de aula, conforme os desdobramentos e reações dos alunos. No entanto, o professor que ministrará a aula pode decidir por caminhos diversos face a situações não previstas ocorridas durante a aula.

### Etapa 3: Reflexão

Assim que a aula acaba, os professores se reúnem para analisar os impactos da aula sobre o desempenho e a aprendizagem matemática dos alunos. O objetivo nesse momento é refletir sobre as observações dos professores participantes e reações dos alunos, decidir, por exemplo, pela necessidade de novo planejamento a fim de corrigir opções no plano de ação do grupo de professores, de inserir discussões não previstas que tiverem surgido durante a execução da aula, sempre com o objetivo de potencializar a aprendizagem dos alunos. O grupo pode, então, decidir por debruçar-se sobre possíveis melhorias na aula, aprimorando o que tiver sido produzido até o momento, atualizan-

do o planejamento e, assim, inaugurando uma nova etapa.

Em seguida, o mesmo ou outro professor do grupo pode ministrar essa nova aula, observado pelos colegas e seguido de nova reflexão, em um processo contínuo denominado por nós de Espiral do *Lesson Study*<sup>9</sup> – uma vez que, a cada nova edição de planejamento–execução–reflexão, agregam-se experiências em nível mais elevado de maturidade (Figura 1)<sup>10</sup>.

Figura 2. Professores planejando a aula.



Fonte: Adaptada de Gaigher; Souza; Wrobel (2017).

Antes de apresentarmos o problema dos **Peixes para Constar e Estimar**, gostaríamos de clarificar alguns termos japoneses frequentemente usados na literatura sobre *Lesson Study*<sup>11</sup>:

---

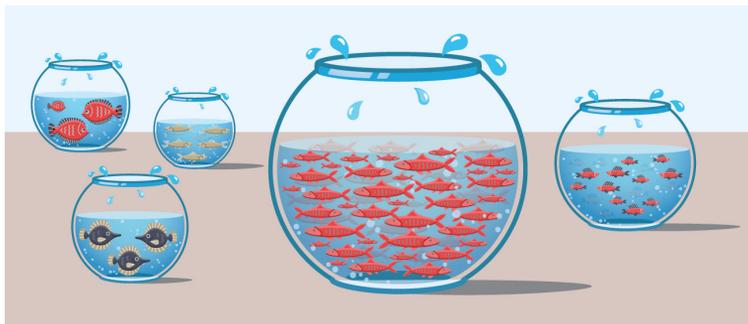
<sup>9</sup>Adaptado de Gaigher; Souza; Wrobel (2017).

<sup>10</sup>Mais informações sobre o *Lesson Study* podem ser consultadas em Souza e Wrobel (2018) e em Souza, Wrobel e Baldin (no prelo).

<sup>11</sup>Fernandez; Yoshida (2004, p.235). Adaptação das autoras.

<i>Bansho</i>	Aula registrada na lousa. Não se trata da simples exposição das estratégias, mas sim a questão da aula, diversas soluções dos alunos com suas estratégias e justificativas, e a síntese final pelo professor. A lousa não é apagada durante a aula. Professores japoneses consideram-na como importante ferramenta de ensino para organizar os pensamentos dos alunos.
<i>Hatsumon</i>	Questionamento ou questão.
<i>Jugyou Kenkyu</i>	Questionamento ou questão.
<i>Konaikenshu</i>	Formação continuada de professores realizada em uma escola. Konai significa “na escola” e kenshu, “treinamento” no sentido da formação do profissional.
<i>Neriage</i>	Momento em que os alunos, cuidadosamente guiados pelo professor, compartilham seus entendimentos, analisam, comparam e contrastam criticamente essas ideias, considerando questões como eficiência, generalização e semelhança com o que foi aprendido. É a conclusão coletiva apurada por todos, e que se formaliza na síntese pelo professor.

## O PROBLEMA DOS PEIXES PARA CONTAR E ESTIMAR



Flora gosta muito de peixes. O maior dos seus aquários é para os peixes vermelhos. São muitos e como estão sempre em movimento Flora não consegue ter ideia de quantos são, mas gostaria de saber a quantidade aproximada.

Resolveu então fazer o seguinte: mergulhou uma pequena

rede e apanhou alguns peixes. Ao contá-los constatou serem 38. Com uma tinta permanente, marcou-os na cauda com um ponto preto. Voltou a lançá-los no aquário e eles se misturaram com os que lá tinham ficado.

No dia seguinte, mergulhou de novo a mesma rede e desta vez contou 33 peixes. Destes, 7 tinham a marca preta. Aproximadamente, quantos peixes vermelhos tem Flora?<sup>12</sup>

---

<sup>12</sup> Problema adaptado de Viana (2005).

## PARA INICIARMOS NOSSA CONVERSA...

Problemas de Matemática podem remeter a diferentes entendimentos. Para nós, estamos diante de um problema quando nos interessa resolver uma questão matemática para a qual não dispomos de um algoritmo ou uma estratégia prévia que o solucione. Assumir essa postura leva a diferenças importantes sobre o que seja um problema e um exercício. Um exercício de Matemática exige relativamente pouco investimento cognitivo por se traduzir em algo previamente conhecido para executá-lo. O exercício promove automatismos e consolidações mentais essenciais para muitas tarefas, mas que se diferem dos estímulos internos que um problema requer<sup>13</sup>.

O problema dos **Peixes para Contar e Estimar**, em geral, não remete resolvedores a soluções imediatas para a maioria das pessoas ao requerer uso de aparato lógico e matemático para solucioná-lo. Esse problema ainda conta com outras pecu-

---

<sup>13</sup> Souza; Souza (2016), Souza (2012), Ponte (2005), Polya (1978), Schoenfeld (1985).

liaridades que valem a pena mencionar: ele pode ser identificado como um problema verbal<sup>14</sup> e como um problema que não possui uma representação mental clara. Vamos explicar.

Um problema verbal<sup>15</sup> de Matemática é conhecido por revelar uma história ou narrativa contada em linguagem natural. O problema dos **Peixes para Contar e Estimar** não apresenta uma representação mental clara para sua solução, ou seja, não há um algoritmo preestabelecido para resolvê-lo, pelo menos não de forma disseminada na cultura escolar brasileira. Na Psicologia Cognitiva, problemas desse tipo podem ser categorizados como em um continuum de clareza das representações mentais<sup>16</sup>. As representações geralmente envolvem percepções, pensamentos, uso de memória(s) na mente da pessoa durante operações cognitivas<sup>17</sup>. Ao contrário, exercícios de Matemática com representações bem definidas costumam promover menos estímulos internos. Por exemplo, se o aluno conhece a fórmula de Bháskara, encontrar as raízes de uma equação polinomial do segundo grau se aproxima de um exercício, no sentido que a Psicologia Cognitiva nos aponta. Por fim, é útil apontar brevemente o que documentos oficiais de todo o mundo<sup>18</sup> destacam sobre a importância de se trabalhar a resolução de problemas em Aulas de Matemática, bem como as pesquisas na área de Educação Matemática. De acordo com essas recomendações, essa prática é um meio de desenvolver a autonomia e o pensamento crítico que toda educação deve promover.

---

<sup>14</sup> Problemas verbais são conhecidos na literatura geral como *word problems*.

<sup>15</sup> Souza; Guimarães (2015a).

<sup>16</sup> Sternberg (2010).

<sup>17</sup> Vandenbos, Dicionário de Psicologia da APA (2010).

<sup>18</sup> Por exemplo, nos EUA pelo NCTM (1980), Japão por Takahashi (2006), e Brasil (1998).

## No Brasil recomenda-se que

o fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos que admitem diferentes respostas em função de certas condições, evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos<sup>19</sup>.

Apesar das orientações expressas nesses documentos ou em artigos científicos<sup>20</sup>, a Matemática escolar brasileira parece ter assumido a resolução de problemas como uma atividade complementar<sup>21</sup>, na melhor das hipóteses. Talvez a imprevisibilidade que sua incorporação acrescenta ao ensino justifique o afastamento de professores de práticas pedagógicas mais pautadas pela resolução de problemas, no sentido que discutimos aqui. A boa notícia é que o *Lesson Study* pode contribuir para que o professor construa uma bagagem didático-pedagógica e matemática mais sólida, o que pode repercutir no desenvolvimento de sua própria autonomia profissional, por meio do contato com um repertório mais amplo de estratégias, modos de pensamento e ideias.

O professor pode considerar o ensino com a resolução de problemas de, pelo menos, três maneiras:

- como aplicação de conhecimentos (aprendem-se as regras para, então, as aplicar na resolução de um problema);
- como via de aprendizagem (o problema é proposto para

---

<sup>19</sup> Brasil (1998, p.42).

<sup>20</sup> Onuchic (2014), Schoenfeld (1996), Abrantes (1989), Lester; Garofalo (1982) entre outros.

<sup>21</sup> Abrantes (1989).

se aprender um conteúdo matemático) ou, simplesmente;

- como motivação (para despertar interesse e encanto dos alunos pelos objetos matemáticos e beneficiar-se dele para solução de problemas)<sup>22</sup>.

Essas premissas se firmam como antecedentes para o desenvolvimento do *Lesson Study* baseado no problema dos **Peixes para Contar e Estimar** que passamos a apresentar.

---

<sup>22</sup> Souza; Guimarães (2015b).

## COMO E ONDE TUDO ACONTECEU

O *Lesson Study* (*Jugyou Kenkyu*) sobre o problema dos **Peixes para Contar e Estimar** aconteceu no segundo semestre de 2017 com a participação de um grupo formado por 17 professores de Matemática<sup>23</sup> do Município da Serra – ES; e por cinco professoras-pesquisadoras, sendo duas professoras do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes), duas docentes da Universidade Federal do Espírito Santo (Ufes) e uma da rede estadual do Estado do Espírito Santo, todas professoras de Matemática, pós-graduadas em Matemática ou Educação Matemática, todas autoras deste volume da série *Lesson Study* em Matemática. Assim, o grupo era composto de 17 professores e cinco professoras-pesquisadoras<sup>24</sup>.

---

<sup>23</sup> A formação iniciou com 28 professores inscritos, mas somente 17 participaram plenamente até o final.

<sup>24</sup> Utilizamos o termo professoras-pesquisadoras apenas com o intuito de distinguir as professoras formadoras dos professores em formação pois, no sentido do *Lesson Study*, todos os professores participantes são pesquisadores.

Este grupo foi constituído a partir de uma parceria entre o Centro de Formação da Secretaria Municipal de Educação do município da Serra – ES, o Instituto Federal do Espírito Santo e a Universidade Federal do Espírito Santo, para uma formação continuada de professores de Matemática do Ensino Fundamental II com o objetivo de contribuir para suas práticas de ensino em aulas de Resolução de Problemas, visando ao desenvolvimento cognitivo dos alunos em suas compreensões textuais, ampliação do repertório de estratégias, interação entre alunos e aluno-professor. Como ações desta Formação, destacamos o estudo de aspectos teóricos para embasar nossas práticas e a elaboração-execução-reflexão de uma aula baseada em um problema tendo o *Lesson Study* como estrutura metodológica, como mostraremos a seguir.

Os encontros no Centro de Formação e na escola foram gravados em vídeo e fotografados para a revisão da escrita do planejamento, para reestudo da participação e aprendizagem dos estudantes em aula e para subsidiar aspectos pontuais que foram objeto de reflexão posterior das autoras. As imagens e vozes serviram, igualmente, para ilustrar e aumentar o poder de compreensão de passagens de todas as etapas de desenvolvimento do *Lesson Study* neste livro.

Importante mencionar que os vídeos e fotografias ocorreram em ambiente natural da formação de professores e de sala de aula, que não se constituem em recintos que favoreçam a qualidade das imagens. Por essa razão, reproduzimos fielmente neste livro a produção escrita de professores e alunos, inclusive mantendo as cores e a disposição espacial, em imagens destacadas com uma lupa, para maior conforto do leitor (Figuras 3 a 14 e Figura 28).

Todos os registros e sua divulgação em meios acadêmicos e escolares foram autorizados pelos participantes em um termo

de consentimento livre e esclarecido (professores em formação, professores-pesquisadores, pais de alunos e gestores), permitindo que o material seja utilizado para fins acadêmico-científicos, inclusive com o uso de imagens, transcrição de áudios e nomes reais. Além disso, o prefeito e a secretária de educação do município da Serra – ES concordaram com a divulgação do nome do Centro de Formação, da Escola Américo Guimarães Costa e do próprio município da Serra. Mesmo com as autorizações dos professores, pesquisadores e alunos participantes, optamos por não usar os verdadeiros nomes no livro por não ser relevante “quem” praticou a ação, mas “o que” exerceu ou “como”. Por isso, os professores e professoras-pesquisadoras serão referenciados por nomes fictícios ao longo do texto, sem distinção entre eles.

Os encontros para o planejamento da aula foram realizados no Centro de Formação “Prof. Pedro Valadão Perez”, às sextas-feiras, das 8h às 11h, em um espaço destinado à formação continuada dos professores da Prefeitura Municipal da Serra (konai-kenshu), como mostra a Figura 2<sup>25</sup>. Esse horário é destinado pela Secretaria de Educação da Serra – ES para o planejamento de aulas de Matemática e, dessa forma, professores de Matemática não estavam em sala de aula e puderam se ausentar de suas escolas para participar da Formação. Esses professores deixaram o planejamento de suas aulas regulares para serem realizados fora do horário de expediente, o que demonstra interesse no tema da Formação.

---

<sup>25</sup> Esta e as outras fotografias/figuras do texto são de autoria das autoras e, por essa razão, optamos por não destacar repetidamente a fonte ao longo do texto.

Figura 2. Professores planejando a aula.



A execução da aula ocorreu na EMEF Américo Guimarães Costa, local de trabalho da professora eleita pelo grupo para ministrá-la. A escolha da professora ocorreu entre aqueles que ministravam aulas no ano escolar cujos alunos teriam nível de maturidade e bagagem matemática para o desenvolvimento do problema.

A aula foi lecionada para 20 alunos regulares do 8º ano do Ensino Fundamental. Logo após o seu término, o grupo de professores voltou a se reunir para refletir e discutir impactos da aula sobre a aprendizagem dos alunos. Todo o *Lesson Study* aconteceu em 5 encontros de 3 horas cada, conforme detalhados no quadro abaixo:

Encontro/ Data	Resumo dos conteúdos dos encontros
1º 29/09/2017	Estudo sobre o modelo <i>Lesson Study</i> , a Resolução de Problemas, a Prática do Ensino de Matemática e alguns pontos sobre a Psicologia Cognitiva.
2º, 3º e 4º 27/10, 07/11 e 24/11/2017	Definição dos objetivos da aula. Seleção do problema dos <b>Peixes para Contar e Estimar</b> em meio a outros problemas verbais. Estudo de possíveis obstáculos

	com a compreensão do texto do problema. Realização do planejamento da aula. Discussão, elaboração e apresentação de diferentes estratégias para a solução do problema. Escolha do professor executor da aula, da escola, do ano escolar, do dia da aplicação, da duração da aula e do local para reunião após a aula. Elaboração de instrumentos de avaliação.
5º 01/12/2017	Execução da aula seguida de reunião para reflexão, discussão e avaliação dos resultados da aprendizagem e da potencialidade do planejamento concretizado na aula.

Apesar de os estudos formais de algumas teorias e do próprio *Lesson Study* terem se concentrado, principalmente, no 1º encontro, por várias vezes ao longo da formação, eles foram retomados a fim de apoiar diversas decisões e evitar equívocos como, por exemplo, consumir tempo de aula com ideias não matemáticas, fazer perguntas amplas que não contribuem para a orientação da construção de estratégias matemáticas pelos alunos e outros aspectos descritos em pesquisas científicas<sup>26</sup>.

---

<sup>26</sup> Gaigher, Souza e Wrobel (2017); Takahashi e McDougal (2016); Murata e Takahashi (2002); Takahashi (2006) e Baldin (2009).

Passaremos, então, à discussão sobre o processo de construção da aula que inclui, entre outras coisas, as etapas de planejamento, execução e reflexão sobre uma aula em que se propôs o problema dos **Peixes para Contar e Estimar**.

## O PLANEJAMENTO COLABORATIVO

O 1º encontro da Formação foi destinado ao estudo teórico do que seja *Lesson Study*, Resolução de Problemas, a prática do Ensino de Matemática e aspectos da Psicologia Cognitiva.

O 2º encontro iniciou com o planejamento colaborativo introduzido pela seleção do problema dos **Peixes para Contar e Estimar**. Antes de discorrermos sobre o planejamento, é importante destacar que apresentamos neste texto partes da construção desta etapa que consideramos mais relevantes, evitando repetições que poderiam tornar a leitura cansativa, mas sem deixar de considerar o fato de que, em geral, o planejamento não transcorreu de forma linear, tendo avançado e retroagido, como em todo processo natural de pensar e repensar um tema.

Os professores participantes, inicialmente, formaram quatro grupos para facilitar a discussão de aspectos como o público-alvo, a compreensão do texto e as possíveis estratégias de resolução. Em seguida, cada grupo apresentou suas reflexões para os outros grupos e para as professoras-pesquisadoras. Os professores decidiram que o problema era adequado para

alunos a partir do 8º ano por ser compatível com a maturidade e requisitos matemáticos daqueles alunos. Eles ponderaram, inicialmente, que os alunos deveriam saber relacionar corretamente quantidades, equação polinomial do primeiro grau e noções de proporcionalidade. Para o público-alvo, o problema não seria difícil demais a ponto de desistirem, nem tão fácil que chegasse a ser desestimulante. Definiram, também, que sua aplicação ocorreria em uma aula de 100 minutos, a se iniciar às 7h50, segunda aula regular do dia naquela escola.

Ao mesmo tempo, o grupo de professores determinou os objetivos da aula, em consonância com o *Lesson Study*: desenvolver nos alunos a capacidade de resolução de problemas matemáticos; promover a autonomia de pensamento e liberdade de expressão das ideias matemáticas; conhecer diferentes estratégias matemáticas para o mesmo problema; possibilitar/estimular a oralidade, a interação e a capacidade de argumentação dos alunos, entre outros.

## DISCUSSÃO SOBRE AS ESTRATÉGIAS MATEMÁTICAS

Flora gosta muito de peixes. O maior dos seus aquários é para os peixes vermelhos. São muitos e como estão sempre em movimento, Flora não consegue ter ideia de quantos são, mas gostaria de saber a quantidade aproximada. Resolveu então fazer o seguinte: mergulhou uma pequena rede e apanhou alguns peixes. Ao contá-los constatou serem 38. Com uma tinta permanente, marcou-os na cauda com um ponto preto. Voltou a lançá-los no aquário e eles se misturaram com os que lá tinham ficado. No dia seguinte, mergulhou de novo a mesma rede e desta vez contou 33 peixes. Destes, 7 tinham a marca preta. Aproximadamente, quantos peixes vermelhos tem Flora?

Para conforto do leitor, repetiremos o texto do problema:

*Pedro*            33 peixes; destes, 7 estavam marcados, então, o total de peixes será: o que tirou na primeira [38], mais o que tirou na segunda [33], menos os que estavam marcados [7], ou seja, 64 peixes... foi essa a minha conclusão. A meu ver a questão do problema ficou vazia, porque eu não sei se eu passasse a rede novamente, se eu pegaria mais peixes marcados. Proponho passar a rede novamente. Outra coisa é que os peixes deveriam ser marcados dos dois lados...

O professor Pedro foi o primeiro a apresentar uma estratégia e a argumentar defeitos no texto do problema.

Pedro, na verdade, somou os 38 peixes que foram marcados na primeira retirada com os outros 26 ( $33-7=26$ ) não marcados na segunda retirada. O resultado encontrado por Pedro não expressava a aproximação da quantidade de peixes no aquário, mas sim, a quantidade MÍNIMA de peixes. Outros professores seguiram esse raciocínio e, após extensas discussões entre professores e professoras-pesquisadoras, o grupo entendeu que esse modo equivocado de pensar poderia ocorrer com os alunos.

*Professores e  
Professoras-  
pesquisadoras*

Se os alunos encontrarem  $38 + 26$  como resposta, a professora que ministrará a aula dirá: “o problema quer saber a quantidade mínima de peixes ou a quantidade aproximada de peixes no aquário? Vamos voltar ao texto do problema: Flora retirou 38 peixes na primeira vez e eles foram marcados. Na segunda retirada vieram 7 peixes marcados daqueles 38, mais 26 não marcados. É verdade que só restaram no aquário 31 peixes marcados, mas não podemos garantir que todos os peixes que ficaram no aquário estavam marcados. Logo, podemos afirmar haver no mínimo  $38 + (33 - 7) = 64$  peixes no aquário.

Esse fato foi considerado no planejamento ensejando reflexões sobre como auxiliá-los no pensamento caso viesse a ocorrer.

O grupo discutiu que o problema não contemplava uma terceira retirada de peixes e que o texto já fornecia os dados necessários para a solução. Além disso, seria desnecessária a marcação dos dois lados dos peixes.

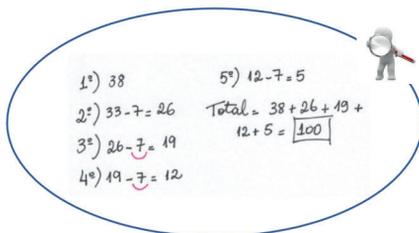
João

Eu subtraí 7 peixes a cada vez que a rede fosse jogada. Então, tínhamos 38 peixes na primeira retirada; na segunda teríamos  $33-7=26$ ; na terceira,  $26-7=19$ ; na quarta,  $19-7=12$ ; na quinta,  $12-7=5$ . Mas, e agora? Jogarei novamente a rede? Não terei mais 7 peixes lá.

Vencida essa reflexão, João apresentou seu raciocínio dizendo:

João somou os resultados de cada retirada e concluiu que o aquário tinha, aproximadamente, 100 peixes (Figura 3). O grupo questionou a razão de João subtrair 7 peixes a cada retirada e por que optou por retirar tantas vezes os peixes do aquário. Ele não justificou, mas acredita-se que esse professor esperava subtrair sucessivamente 7 peixes ( $33-26=7$ ) até esvaziar o aquário, o que não ocorreu por terem “sobrado” 5 peixes nessa contagem.

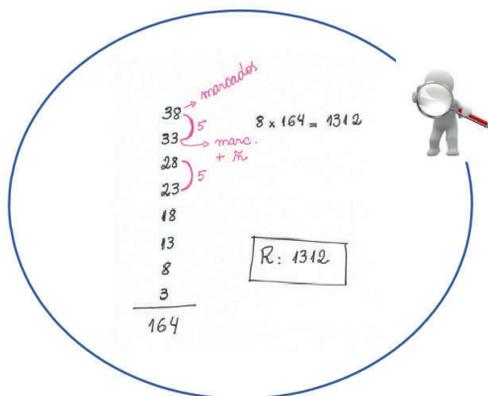
Figura 3. Estratégia de solução de João.



O mesmo ocorreu com Luiza (Figura 4), que raciocinou semelhantemente a João, mas subtraindo de 5 em 5 ( $38-33=5$ ). Em seguida, multiplicou as quantidades de subtração (considerou subtrair 8 vezes, quando, na verdade, subtraiu apenas 7 vezes) e multiplicou pela soma de resultados encontrados em cada sub-

tração ( $38 + 33 + 28 + 23 + 18 + 13 + 8 + 3$ ), declarando haver 1.312 peixes aproximadamente.

Figura 4. Estratégia de solução de Luiza.



Professores e  
Professoras-  
pesquisadoras

Por que 7? Por que 5? Por que essas  
operações matemáticas?

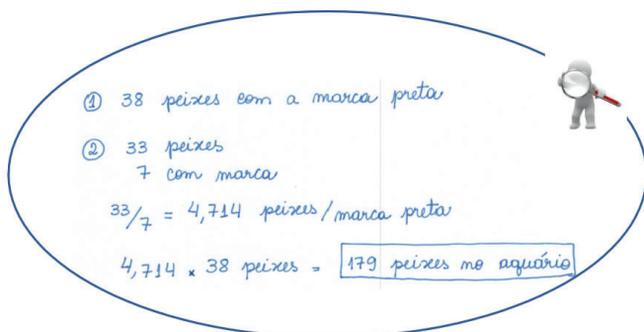
O grupo questionou esses professores do seguinte modo:

Os professores João e Luiza justificaram as sucessivas subtrações buscando zerar a quantidade de peixes, o que não ocorreu. Por esse motivo, abandonaram essas estratégias. Mas a preocupação era a de como conduzir os alunos caso essas resoluções ocorressem em sala de aula. O grupo decidiu que os questionariam do mesmo modo como fizeram com João e Luiza. Esclarecemos que os alunos deveriam justificar passo-a-passo seus raciocínios, suas opções estratégicas e operações, justamente cumprindo com os objetivos de estimular a oralidade e a capacidade de argumentação matemática, independentemente

se a solução estiver correta ou não. Realçamos que o maior interesse do professor como mediador deve ser com o processo de construção das ideias matemáticas e não apenas com a solução correta. Sob esse prisma, o fato de uma estratégia apresentada por um aluno durante o processo de resolução do problema conduzir a uma resposta matematicamente “certa” ou “errada” tem pouca relevância. O erro ou o acerto são momentos ricos para o desenvolvimento dos objetivos traçados.

Outra estratégia adotada refere-se à proporção entre peixes capturados e peixes com marca preta, como mostra a Figura 5.

Figura 5. Proporção entre peixes capturados e marcados.



Os professores-pesquisadores convidaram Camila para mostrar seu modo de pensar. Camila, bem como outros professores, a exemplo de Luana, relacionou peixes capturados e peixes marcados, mas optou por usar a relação entre quantidades (Figura 6) por entender a relação entre grandezas diretamente proporcionais. A explicação de Camila e a de outros professores convenceu os colegas que ainda estavam em dúvida sobre suas estratégias. Em outras palavras, os argumentos giraram em torno da proporção entre a quantidade de peixes que se quer saber e a quantidade de peixes marcados na primeira captura; e

entre a quantidade de peixes capturados pela segunda vez e os peixes marcados nessa captura.

Figura 6. Estratégia de solução de Camila.

The image shows handwritten mathematical work by Camila. At the top, there are two equations:  $x - 38$  and  $33 - 7$ . Below these is a larger equation:  $x = \frac{33 \cdot 38}{7} = 179,14$ . The number 14 in the decimal part is circled in red. Below the main equation, there are two approximations:  $\cong 179$  and  $\cong 180$ , with the second one written in red. A small cartoon character with a magnifying glass is positioned to the right of the equations.

*Maria e Lara*

Podemos ficar com a resposta 179,14? Qual o significado matemático de aproximar? Esse significado é o mesmo para a aproximação solicitada no texto do problema? Que simbologia vamos adotar para comunicar matematicamente uma aproximação?

O resultado encontrado motivou Maria e Lara a questionarem os professores sobre a resposta de 179,14.

Os professores entenderam a aproximação como um obstáculo que deveria ser esclarecido com os alunos. O que significaria uma aproximação como resultado de um problema? Trata-se de um questionamento (Hatsumon) importante, pois é contrário à cultura dominante de ensino de Matemática na educação básica, que privilegia problemas com um único procedimento de resolução e com uma resposta considerada “exata”.

Artur mencionou que os alunos estavam acostumados a arredondar para o inteiro imediatamente anterior se o resultado fosse menor ou igual a 0,5, e para o inteiro imediatamente

*Elisa* Mas existe meio peixe? Devemos aceitar a resposta como 179 ou 180 por ser uma aproximação.

posterior se estivesse a mais de 0,5. Nesse momento, um dos professores perguntou:

*Henrique* Mas se há mais de 179 peixes devemos arredondar sempre para o inteiro imediatamente posterior ao resultado.

Outro professor ponderou:

O grupo discutiu o tema do arredondamento “para mais” ou “para menos” e decidiu aceitar ambas as soluções como corretas, uma vez se tratar de uma aproximação para a quantidade de peixes no aquário. Argumentaram sobre outras situações em que caberiam os arredondamentos “para mais” ou “para menos” e resolveram que havia mais a ser incluído no planejamento sobre a “aproximação”. O grupo também inferiu que seria boa oportunidade de discorrer sobre estimativas, por ser um

*Carla* Um exemplo é o problema dos soldados que devem ser transportados em caminhões. A capacidade dos caminhões é inferior ao de soldados e, por isso, devemos ter mais de um caminhão. Por exemplo, se a capacidade de cada caminhão for de 30 soldados e tivermos 63 soldados, a divisão de 63 por 30 será 2,1. Se aproximarmos para o inteiro

imediatamente inferior usaremos apenas 2 caminhões, e três soldados ficarão sem ser transportados. Devemos raciocinar sobre os resultados encontrados para decidir.

tema relevante para a Matemática. Carla sugeriu apresentarem situações cuja estimativa fosse cotidianamente usada.

Ana lembrou os professores sobre a quarta etapa das heurísticas de Polya (1978) chamada *looking back*, que se encaixa perfeitamente na discussão e que foi motivo de debate no primeiro encontro da Formação. O *looking back* se caracteriza pela coerência da solução encontrada com o que o problema solicitou e com os dados fornecidos. Ademais, é possível que dessa revisão surja solução mais encurtada ou com matemática mais simples. Esse também é um dos objetivos da aula por desejar que os alunos se apropriem de outras estratégias matemáticas e de modos mais encurtados e mais simples de resolver. O *looking back* não privilegia “macetes” ou atalhos, mas prima por uma análise de diferentes modos de solução, elegendo como mais elegante aquela que, do ponto vista matemático, seja a mais simples.

*Maria*

Ok, mas e quanto ao significado matemático de aproximar? É o mesmo para a aproximação mencionada no problema? E a simbologia?

Em seguida, Maria lembrou-os que algumas perguntas ainda não haviam sido respondidas.

Os professores responderam que o significado matemático é o de arredondar, levando-se em conta que a variável em ques-

tão era a quantidade de peixes e, portanto, o resultado deveria ser um número natural. Essa concepção é correta e fundamental para a solução do problema. Mas os professores não se deram conta de que a solução matemática 179,14 como resultado

$$179,14 = \frac{17.914}{100} = \frac{8.957}{50} \neq \frac{1254}{7}.$$

de  $1254/7$  é, em si, uma aproximação, uma vez que interrompemos (truncamos) a continuação do cálculo. A rigor,

$$\frac{1254}{7} \approx 179,14.$$

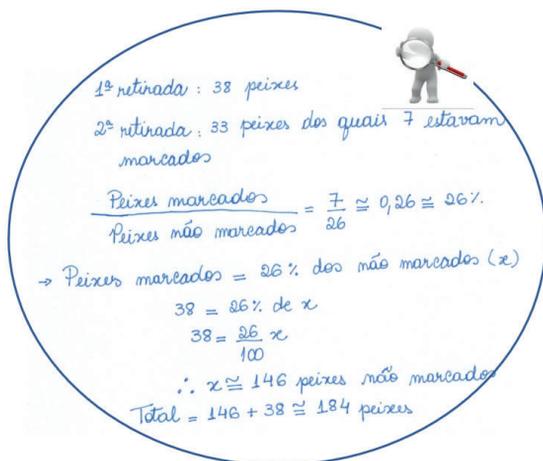
Trata-se, portanto, de uma aproximação e não uma igualdade, ou seja,

Ressaltamos que a simbologia matemática escrita na lousa deve ser cuidadosa e representar precisamente os objetos matemáticos. Entretanto, não há um consenso sobre haver uma única representação para a aproximação. Por exemplo, os sím-

bolos  $\approx$ ,  $\simeq$  e  $\cong$  foram mencionados como representação para aproximações por colegas matemáticos externos ao grupo. Mais importante que o estabelecimento de um único símbolo para aproximação é não utilizar o símbolo de igualdade inadvertidamente quando, na verdade, se trata de uma aproximação. Adotaremos o símbolo  $\approx$ , por ter sido o eleito pelo grupo na Formação.

Outra estratégia apresentada no grupo refere-se ao uso de razão para relacionar as grandezas “peixes marcados” e “peixes não-marcados” em cada uma das duas retiradas (Figura 7).

Figura 7. Peixes marcados e não marcados.



Essa estratégia utilizou uma aproximação por truncamento ao efetuar o cálculo da divisão  $7/26$ , produzindo um resultado correto, mas diferente dos apresentados a seguir.

A apresentação desse resultado é pertinente e adequada em sala de aula para que os estudantes percebam que operações matemáticas realizadas sobre valores aproximados podem gerar resultados distintos.

Outros professores apresentaram a mesma estratégia matemática, mas sem efetuar a aproximação acima. Nesse caso, o resultado foi o mesmo encontrado anteriormente (Figuras 8 e 9).

Figura 8. Peixes marcados e não marcados.

$$\frac{\text{Marcados}}{\text{não marcados}} = \frac{7}{26} = \frac{38}{x}$$

$$7x = 26 \cdot 38$$

$$x = \frac{988}{7}$$

$$x \approx 141,14$$

$$\begin{array}{r} 141,14 \\ + 38,00 \\ \hline 179,14 \end{array}$$

$$179,14 \text{ peixes}$$

$$\begin{array}{r} 4 \phantom{0} \\ \times 26 \\ \hline 228 \\ + 76 \\ \hline 988 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 26 \\ \hline 228 \\ + 76 \\ \hline 988 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 26 \\ \hline 228 \\ + 76 \\ \hline 988 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 141,14 \\ \times 7 \\ \hline 988 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 141,14 \\ \times 7 \\ \hline 988 \end{array}$$

Figura 9. Outra solução com peixes marcados e não marcados.

$$\frac{\text{marcados}}{\tilde{n} \text{ marcados}} = \frac{7}{26}$$

$$1^{\circ}) \frac{\text{marcados}}{\tilde{m} \text{ marcados}} = \frac{38}{T}$$

$$\frac{7}{26} = \frac{38}{T}$$

$$T = \frac{26 \cdot 38}{7}$$

$$T = 141,14$$

$$\text{Total} \approx 141,14 + 38$$

$$(179,14)$$

Esse debate foi seguido da estratégia apresentada pela professora Elisa, que usou a ferramenta de equação, alcançando também uma resposta correta. Ela foi incluída no planejamento

como um pensamento viável, visando ao alargamento do repertório de possibilidades de solução pelos alunos e como oportunidade de revisão desse tema matemático (Figura 10).

Figura 10. Estratégia de solução de Elisa.

1ª

$$\frac{m-38}{v} \quad \frac{38}{p}$$

$\rightarrow \tilde{m}$  marcados

2ª) - 33 peixes  $\rightarrow 7p$   
 $v = 33 - 7 = 26v$  |  $7p$

$$\frac{\tilde{m}}{m-38} \rightarrow \frac{\tilde{m}}{26}$$

$$\frac{38}{p} \rightarrow \frac{7}{p}$$

$$\frac{m-38}{26} \times \frac{38}{7}$$

$$7m - 266 = 988$$

$$7m = 988 + 266$$

$$7m = 1254$$

$$m = \frac{1254}{7}$$

$$m = 179,14$$

Outra tática adotada foi o uso de porcentagem (Figura 11).

Figura 11. Solução por porcentagem.

$$\frac{33}{7} = \frac{100\%}{x} \quad x = 21,21\%$$

$$38 = 21,21\% \quad x = 179 \text{ peixes no aquário}$$

$$x = 100\%$$

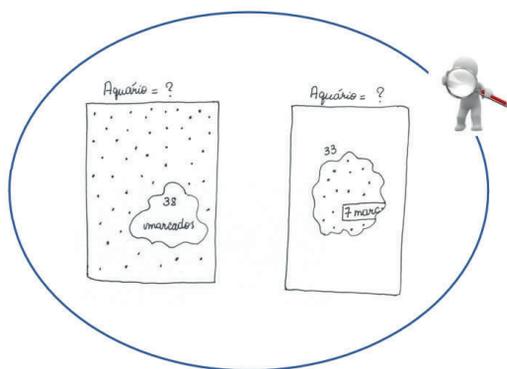
Nenhum professor considerou a possibilidade de uma abordagem pictórica associada às explicações orais, tão válida quanto qualquer outra se considerarmos o pensamento matemático como precursor do uso da linguagem matemática específica. Essa omissão era, por nós, esperada, uma vez que a desqualificação de abordagens pictóricas, por esquemas ou que

não utilizem a linguagem formal matemática é algo frequente na cultura de ensino de Matemática no Brasil.

Assim, um dos professores-pesquisadores estimulou os professores a buscar essa via, sobretudo pela valorização e estímulo do desenvolvimento de mentes mais imagéticas, do lado do hemisfério cerebral mais proposicional, assunto igualmente abordado no primeiro encontro da Formação pelo lado mais técnico da Psicologia Cognitiva e da Neurociência<sup>27</sup>. Os professores se debruçaram sobre essa possibilidade e Ana apresentou suas explicações na forma de diagramas (Figura 12).

Ana                      A proporção dos 38 peixes marcados para o total de peixes no aquário é a mesma proporção dos 7 peixes marcados para os 33 capturados.

Figura 12. Diagrama para explicar a solução.



<sup>27</sup> Johnson-Laird (1983); Souza (2007); Souza (2012).

A explicação dada por esses professores estimulou o grupo ao pensar, agora, nas conexões entre as estratégias. O grupo determinou que após o *neriage* – discussão das resoluções pensadas pelos alunos seguida de uma síntese –, as estratégias não contempladas seriam motivo de intervenção pela professora que executaria a aula. Ela deveria encorajá-los a refletir, tomando a explicação pictórica (Figura 12) como ponto de partida e fundamento para os outros argumentos matemáticos. Esse momento poderia, igualmente, se prestar para esclarecimentos aos alunos que não tivessem alcançado algum pensamento que convergisse para a solução correta do problema.

De acordo com a literatura, o professor deve estar munido de diferentes estratégias de solução<sup>28</sup> a fim de ampliar o repertório de modos de pensar dos alunos. Essa plasticidade pode fertilizar a busca de solução de outros problemas, além de estimular áreas mentais que necessitem de determinada incitação. É o caso de problemas que possam ser solucionados pela via algébrica, geométrica, por esquemas, tabelas, desenhos etc. É comum que as pessoas tenham tendência a eleger um ou outro modo de solução, a depender dos estímulos que tenham recebido ao longo da escolaridade<sup>29</sup>. Assim, é importante que os professores estejam preparados para essa diversidade no ensino.

---

<sup>28</sup> Hill et al. (2011), Polya (1978), Abrantes (1989), Ponte (2014).

<sup>29</sup> Souza (2007).

## COMPREENSÃO DO TEXTO DO PROBLEMA

Em meio à elaboração das estratégias, houve preocupação com a compreensão do texto do problema. Os professores concluíram que os termos faziam parte do cotidiano daqueles alunos, mas algumas passagens mereceriam algum cuidado com a verificação de seu entendimento. Os trechos eleitos como potenciais embaraços estão destacados na cor vermelha no problema que voltamos a apresentar.

**Flora gosta muito de peixes. O maior dos seus aquários é para os peixes vermelhos. São muitos e como estão sempre em movimento Flora não consegue ter ideia de quantos são, mas gostaria de saber a quantidade aproximada.**

**Resolveu então fazer o seguinte: mergulhou uma pequena rede e apanhou alguns peixes. Ao contá-los constatou serem 38. Com uma tinta permanente, marcou-os na cauda com um ponto preto. Voltou a lançá-los no aquário e eles se misturaram com os que lá tinham ficado.**

**No dia seguinte, mergulhou de novo a mesma rede e desta vez contou 33 peixes. Destes, 7 tinham a marca preta. Aproximadamente, quantos peixes vermelhos tem Flora?**

Os trechos “ter ideia de quantos são”, “a quantidade aproximada” e “aproximadamente” foram de interesse do grupo por trazerem ao primeiro plano discussões acerca da estimativa matemática. Em *Lesson Study*, a reação esperada dos alunos também integra o planejamento. Por exemplo, o debate a respeito do “aproximadamente” deveria progredir para a discussão do arredondamento que antes comentamos, para a apresentação do problema dos caminhões e soldados e para a simbologia matemática que, usualmente, representaria um resultado aproximado ( $\approx$ ).

A “tinta permanente” foi objeto de discussão, pois algum aluno poderia afirmar que a tinta poderia se apagar quando os peixes fossem devolvidos ao aquário. O principal questionamento (*Hatsumon*) que o grupo previu foi: “o que significa uma tinta ser permanente?”. A reação esperada dos alunos era a de que respondessem: “que não se apaga”.

A “pequena rede” foi dúvida quando um professor perguntou se todos os alunos saberiam o que seria uma rede de pesca, também conhecida como rede pulsar. Esses alunos residem no litoral capixaba e o grupo opinou que o termo seria do vocabulário dos alunos. De todo modo, incluíram o esclarecimento do termo no planejamento com a pergunta: “Vocês conhecem redes de pesca?”.

Além desses trechos do texto, o professor deve estar preparado para levar o aluno a raciocinar no contexto do problema. Muitas vezes os alunos possuem dúvidas, mas não as verbalizam. Muitas delas não são, necessariamente, em relação ao conteúdo matemático. Nesse caso, o professor deve questioná-los com indagações que os levem a pensar e a construir seu pensamento matemático. Sempre que for o caso, o professor deve fazê-los retornar à leitura do texto, questionando-os e encorajando-os a pensar.

Apresentamos a seguir possíveis questionamentos e respostas esperadas que foram previstas pelo grupo. Utilizamos o termo professora, no feminino, pois a essa altura o grupo já havia decidido quem seria a ministrante da aula.

**Professora:** O que Flora quer saber?

**Resposta provável dos alunos:** quantos peixes vermelhos há no aquário.

**Professora:** Que informações o problema forneceu?

**Respostas prováveis dos alunos:** que tem um aquário

grande cheio de peixes vermelhos; Flora pegou alguns peixes e os marcou com um ponto preto.

**Professora:** O que significa a tinta ser permanente?

**Resposta provável dos alunos:** que a tinta não sai, mesmo na água, assim como uma tatuagem.

**Professora:** Quantos peixes a Flora pegou no início?

**Respostas prováveis dos alunos:** 38.

**Professora:** O que Flora fez com os 38 peixes?

**Resposta provável dos alunos:** marcou-os com uma tinta preta permanente e depois os devolveu para o aquário.

**Professora:** Flora devolveu os 38 peixes para o mesmo aquário?

**Resposta provável dos alunos:** sim.

**Professora:** No dia seguinte, o que Flora fez?

**Resposta provável dos alunos:** Flora apanhou 33 peixes.

**Professora:** O que Flora observou nesses 33 peixes?

**Respostas prováveis dos alunos:** que 7 tinham a marca preta e, portanto, 26 não marcados.

Intervenção da professora caso a resposta não seja a esperada: se os alunos não souberem o porquê do “26”, dizer que pegou 33 e 7 foram marcados. Portanto, quantos não estavam marcados?

**Professora:** O que vocês compreendem ser a palavra “aproximadamente”?

**Respostas prováveis dos alunos:** mais ou menos; não é exato.

Intervenção da professora caso a resposta não seja a esperada: Se os alunos não responderem corretamente, o professor deve provocar uma discussão sobre o significado da palavra “aproximadamente”: ter ideia de quantos são; cerca de; pode ser uma quantidade em torno de; usar estimativa de pessoas em uma multidão – por exemplo passeatas, Ano Novo, shows.

## O QUE OS ALUNOS DEVEM SABER PARA RESOLVER O PROBLEMA

As estratégias construídas pelos professores os levaram a repensar a bagagem matemática que os alunos deveriam dominar para compreender todos os modos de resolução previstos pelos professores. O leque de pré-requisitos inclui:

- 1- Relação entre quantidades;
- 2- Equação polinomial do 1º grau;
- 3- As quatro operações matemáticas (+, -, x, /);
- 4- Proporção;
- 5- Números decimais;
- 6- Operação de divisão com quociente não inteiro.

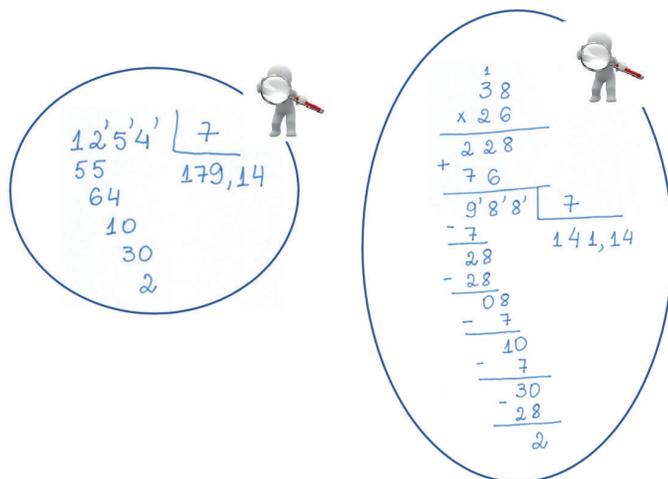
O sexto conteúdo pode surpreender alguns leitores, mas creiam, é fato que alguns alunos brasileiros alcançam o 8º ano do Ensino Fundamental sem dominar a operação de divisão plenamente<sup>30</sup>.

O grupo de professores se preparou para retomar os pré-requisitos necessários para o entendimento da resolução. Por exemplo, as divisões que poderiam fazer parte de alguma estratégia eleita pelos alunos, tais como apresentadas no texto e nas Figuras 8, 9 e 10, destacadas na Figura 13, abaixo, que envolve operações de multiplicação e divisão.

---

<sup>30</sup> Leite, Prane e Kuster (2012), Campos (2018).

Figura 13. A operação de divisão.



Se houver dúvida com as divisões da Figura 13, a professora deverá usar uma operação mais simples (por exemplo:  $13/3$ ) e mostrar, por exemplo, que a divisão é o resultado de agrupamentos com a mesma quantidade de elementos<sup>31</sup>. Sobrando elementos, neste caso, não podemos particioná-los, ou simplesmente incluí-los em algum grupo porque feriria o próprio conceito de divisão. Essa explicação justificará a resposta aproximada do problema.

## PREPARATIVOS PARA A AULA

Os professores devem se preocupar com todos os ingredientes da aula, incluindo os recursos que serão utilizados, a organização física da sala, a dinâmica da aula, etc. Nesse sentido, o grupo decidiu que:

<sup>31</sup>Detalhes sobre o conceito e o processo de divisão podem ser encontrados em Leite; Prane; Kuster (2012); Campos (2018) e Saiz (1996).

1- A sala de aula deve possuir lousa grande e espaço suficiente para os alunos reunidos em grupos e os professores que observarão e tomarão notas. A lousa deve ser grande para que as principais informações da aula, bem como a produção de conhecimento dos alunos e as intervenções da professora, estejam permanentemente acessíveis aos alunos por toda a aula (*bansho*).

2- As carteiras devem estar posicionadas de tal forma que a professora tenha fácil acesso aos grupos de alunos para auxiliá-los em suas dúvidas ou para inferir sobre o processo de construção do conhecimento.

3- Os alunos devem estar organizados em grupos de três e as carteiras previamente organizadas, visando à interação e colaboratividade defendidas pelo *Lesson Study*.

4- O problema deve estar impresso para cada aluno.

5- Haverá uma avaliação escrita, ao final da aula, e ela deverá estar impressa previamente. Para esse momento, o professor deverá reservar tempo suficiente da aula para que os alunos sejam avaliados individualmente (máximo 10 minutos). Esse tema será apresentado na próxima seção.

6- Na sequência, a professora deve aplicar o problema da lagoa<sup>32</sup>, que é análogo ao dos peixes, como mais uma avaliação sobre a compreensão da aula.

Problema da lagoa: quarenta peixes foram capturados em uma lagoa através de uma rede. Cada um deles foi identificado e devolvido para a lagoa. Em outro dia, sessenta peixes foram retirados dessa mesma lagoa utilizando uma rede. Entre esses peixes, quatro possuíam identificação. Como é possível estimar, aproximadamente, o número de peixes da lagoa?

---

<sup>32</sup> Krtutetskii (1976, p.150).

## AVALIAÇÃO

O grupo decidiu que, ao final da aula, a professora deveria entregar aos alunos uma folha contendo duas questões. Na primeira, eles deveriam registrar como verdadeiras ou falsas as afirmações relativas ao texto do problema, objetivando investigar sua compreensão. Na segunda, os alunos seriam solicitados a resolver individualmente o problema dos **Peixes para Contar e Estimar**, recebendo-o, novamente, por escrito. O grupo de professores elaborou um instrumento para avaliar, individualmente, o desempenho dos alunos, tanto na compreensão do texto quanto no raciocínio matemático. O grupo validou o instrumento declarando estar em sintonia com os objetivos da aula, ou seja, verificar a compreensão textual do problema e resolvê-lo. Essa atividade é apresentada a seguir:

### AVALIAÇÃO

Flora gosta muito de peixes. O maior dos seus aquários é para os peixes vermelhos. São muitos e como estão sempre em movimento Flora não consegue ter ideia de quantos são, mas gostaria de saber a quantidade aproximada.

Resolveu então fazer o seguinte: mergulhou uma pequena rede e apanhou alguns peixes. Ao contá-los constatou serem 38. Com uma tinta permanente, marcou-os na cauda com um ponto preto. Voltou a lançá-los no aquário e eles se misturaram com os que lá tinham ficado.

No dia seguinte, mergulhou de novo a mesma rede e desta vez contou 33 peixes. Destes, 7 tinham a marca preta. Aproximadamente, quantos peixes vermelhos tem Flora?

Parte I: De acordo com o texto acima, responda cada item com V para afirmações verdadeiras e F para as falsas:

1. ( ) A palavra “aproximadamente” significa que Flora quer conhecer exatamente quantos peixes vermelhos há no aquário.
2. ( ) Flora só possui peixes vermelhos.
3. ( ) Flora possui mais de um aquário.
4. ( ) Flora marcou todos os peixes vermelhos.
5. ( ) Flora marcou com ponto preto a cauda de 38 peixes.
6. ( ) Flora possui, no mínimo, 64 peixes vermelhos.

Parte II: Resolva o problema descrevendo todos os passos para sua solução (use o verso da folha, se necessitar).

Quarenta peixes foram capturados em uma lagoa através de uma rede. Cada um deles foi identificado e devolvido para a lagoa. Em outro dia, sessenta peixes foram retirados dessa mesma lagoa utilizando uma rede. Entre esses peixes, quatro possuíam identificação. Como é possível estimar, aproximadamente, o número de peixes da lagoa?

Na Parte I, o aluno deveria marcar, de cima para baixo, as opções F F V F V V. Na Parte II esperava-se que o aluno apresentasse uma solução correta para o problema, declarando a solução 179 ou 180 peixes aproximadamente.

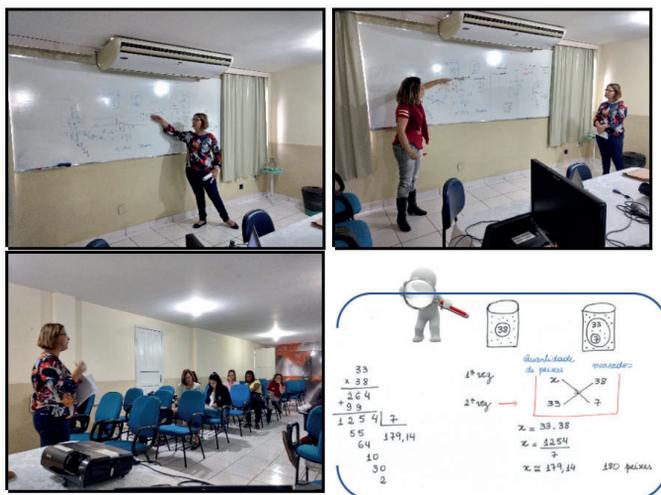
O grupo destacou que, além do instrumento, as próprias observações da professora durante o processo são também importante avaliação e devem ser levadas em conta. Ao circular entre os grupos, a professora poderia/deveria avaliar o processo de construção do conhecimento pelos alunos e esclarecer dúvidas, se fosse o caso, por meio de questionamentos que os reconduzisse para um raciocínio que os levasse à solução do problema.

Igualmente, o *neriage* também poderia/deveria fornecer elementos que permitissem que a professora verificasse se a linha de pensamento convergia para a solução. Caso houvesse di-

vergência, a professora deveria interferir, fazendo do erro uma estratégia didática ou uma oportunidade de aprendizagem, tal como defendem os japoneses<sup>33</sup>.

## AULA PILOTO MINISTRADA PELA PROFESSORA PARA O GRUPO DE PROFESSORES

A professora eleita pelo grupo para ministrar a aula em sua turma de 8º ano estudou o planejamento e apresentou uma simulação de como seria sua intervenção (Figura 14) para o grupo de professores<sup>34</sup>.



<sup>33</sup> Fernandez; Yoshida (2004), Isoda; Olfos (2009).

<sup>34</sup> São condições necessárias para o sucesso de uma aula, o estudo do planejamento pelo professor e a execução de aulas piloto (Isoda, 2010).

Esse foi um importante momento de ajustes da aula, principalmente em relação a aspectos tais como a organização espacial da lousa pela professora, o controle do tempo de aula e a reorganização das carteiras da turma para a aplicação do problema, caracterizando-se como condição necessária para o sucesso da aula.

## **DINÂMICA DA AULA**

Os professores definiram que o problema dos peixes seria entregue/proposto aos alunos no início da aula, para que não pedissem a alguém para resolver por eles ou que buscassem na internet uma solução. A ideia é que todo o envolvimento com o problema se dê para os alunos no mesmo momento.

Os alunos farão uma primeira leitura do problema individualmente (cerca de 5 minutos). Em seguida, um aluno será convidado a ler novamente em voz alta. A professora verificará a compreensão textual do problema pelos alunos para, em seguida, pedir que o solucionem conjuntamente nos grupos (de 15 a 20 minutos). Neste momento, a professora visitará os grupos mediando o processo de solução por meio de questionamentos. Ao transitar entre os grupos, verificará as estratégias e os possíveis erros dos alunos, munindo-se de dados que poderão conduzir suas próximas ações, durante o *neriage*.

O grupo também registrou algumas recomendações para a condução da aula: a professora não deveria responder aos próprios questionamentos, o que é muito comum. Ao contrário, ela deveria dar tempo para os alunos refletirem. Foi recomendado o envolvimento de todos os alunos na discussão, por meio de perguntas e pela valorização de suas produções. Isso promoveria o compartilhamento de raciocínios/soluções uns dos outros,

valorizando a participação do aluno e utilizando o erro como oportunidade de aprendizado.

Outra questão que deve ser observada durante a aula é o tipo de questionamento que a professora faz aos alunos. Perguntas do tipo “o que vocês entenderam do problema?” ou “como vocês resolveriam?” são amplas e podem prejudicar o fluxo de raciocínio autônomo pelos alunos<sup>35</sup>. Questionamentos desse tipo devem ser substituídos por: “o que significa a palavra aproximadamente?”, por exemplo.

---

<sup>33</sup> Wrobel et al. (2016).

## **PLANO DE AULA**

Apresentamos nesta seção um extrato do Plano de Aula produzido colaborativamente durante o planejamento do grupo e que foi detalhadamente discutido no capítulo anterior. Para não cansar o leitor, optamos por não repetir, por exemplo, as estratégias matemáticas e as fotografias.

### PLANO DE AULA SOBRE O PROBLEMA DOS PEIXES

#### INFORMAÇÕES GERAIS

Local para os encontros para o planejamento da aula: Centro de Formação Professor Pedro Valadão Perez – Serra – ES.

Escola para execução da aula: EMEF Américo Guimarães Costa.

Ano escolar: 8º ano (Turma 2).

Quantidade de encontros para o planejamento: 4 encontros de 3 horas, nas datas 29/09, 27/10, 07/11 e 24/11/2017.

Quantidade esperada de alunos: 25.

Local da aula: na sala de aula – térreo.

Duração esperada da aula: 100 minutos consecutivos.

Data da execução da aula: 01/12/2017.

Horário de início: 07h50 (aulas geminadas, 2ª e 3ª aulas)

Local para reunião de avaliação/reflexão da aula executada (logo após a aula): na mesma sala de aula.

#### PREPARATIVOS PARA A AULA

- Autorização dos responsáveis pelos alunos para o registro da aula em vídeo

- Autorização da diretora da EMEF Américo Guimarães Costa.

- Sala de aula com lousa grande e espaço suficiente para os alunos reunidos em grupo e os professores-observadores.

- Os alunos devem estar organizados em grupos de três e a sala de aula previamente organizada em grupos de 3 carteiras.

- Providenciar o problema impresso para os alunos.

- A avaliação, ao final da aula, deverá estar impressa. O professor deverá reservar tempo suficiente da aula para que os alunos sejam avaliados individualmente ao final da aula (máximo 10 minutos).

- Em aula posterior, o professor deve aplicar o problema do lago, que é análogo ao dos peixes para avaliar a compreensão da aula.

- Aula estudada pelo professor e pelo grupo de professores-observadores (planejamento em mãos para os professores-observadores).

- Os alunos que não apresentarem autorização dos responsáveis ficarão com os respectivos professores regulares daquele horário.

- O problema deve ser oferecido na aula a ser ministrada, nunca em aulas anteriores.

## O PROBLEMA

Flora gosta muito de peixes. O maior dos seus aquários é para os peixes vermelhos. São muitos e como estão sempre em movimento Flora não consegue ter ideia de quantos são, mas gostaria de saber a quantidade aproximada.

Resolveu então fazer o seguinte: mergulhou uma pequena rede e apanhou alguns peixes. Ao contá-los constatou serem 38. Com uma tinta permanente, marcou-os na cauda com um ponto preto. Voltou a lançá-los no aquário e eles se misturaram com os que lá tinham ficado.

No dia seguinte, mergulhou de novo a mesma rede e desta vez contou 33 peixes. Destes, 7 tinham a marca preta. Aproximadamente, quantos peixes vermelhos tem Flora?

## O QUE OS ALUNOS DEVEM SABER PARA RESOLVER O PROBLEMA

Os seguintes conteúdos serão lembrados com os alunos, pois podem impactar no processo de solução do problema. Esses conteúdos fizeram parte do currículo escolar em anos anteriores ao 8º ano do Ensino Fundamental.

- Regra de três
- Equação polinomial do 1º grau
- As quatro operações
- Proporção
- Números decimais; divisão com quociente não exato (Ex.:  $1254/7$ ; usar simbologia de aproximação  $\approx$ , ou seja,  $1254/7 \approx 179,14$ )
- Operação de divisão – quociente não inteiro.

Se houver dúvida com essa divisão, usar uma operação menor (por exemplo:  $13/3$ ) e mostrar que a divisão é o resultado de agrupamentos com a mesma quantidade de elementos. Sobrando elementos, não podemos particioná-los,

ou simplesmente inclui-los em algum grupo porque feriria o próprio conceito de divisão. Essa explicação justificará a resposta aproximada do problema.

#### A AULA

- O problema será entregue pelo professor em papel. (Anexo).
- A turma será dividida em grupos de, no máximo, 3 alunos.
- O professor pedirá que leiam o problema, inicialmente, sozinhos.
- O professor pedirá que algum aluno leia em voz alta para a turma.
- O professor verificará a compreensão do problema pelos alunos (5 a 10 minutos) e envolverá todos na discussão.

**Respostas prováveis dos alunos:** [quantos peixes vermelhos há no aquário].

**Professora:** Quais as informações fornecidas pelo problema?

**Respostas prováveis dos alunos:** [que tem um aquário grande cheio de peixes vermelhos; Flora pegou alguns peixes e marcou com um ponto preto].

**Professora:** O que significa a tinta ser permanente?

**Respostas prováveis dos alunos:** [que a tinta não sai mesmo na água, assim como uma tatuagem].

**Professora:** Quantos peixes a Flora pegou no início?

**Respostas prováveis dos alunos:** [38]

Se os alunos responderem 33, o professor deve sugerir uma nova leitura do texto.

**Professora:** O que Flora fez com esses 38 peixes?

**Respostas prováveis dos alunos:** [Marcou com a tinta preta e depois devolveu para o aquário].

**Professora:** Flora devolveu os 38 peixes para o mesmo aquário?

**Respostas prováveis dos alunos:** [Sim]

Se os alunos responderem de modo diverso, o professor deverá solicitar que releiam o problema.

**Professora:** No dia seguinte, o que Flora fez?

**Respostas prováveis dos alunos:** [Flora apanhou 33 peixes].

**Professora:** O que Flora observou nesses 33 peixes?

**Respostas prováveis dos alunos:** [que 7 tinham a marca preta e, portanto, 26 não marcados].

Se os alunos não souberem o porquê do “26”, dizer que pegou 33 e 7 foram marcados. Portanto, quantos não estavam marcados?

**Professora:** O que vocês compreendem ser a palavra “aproximadamente”?

**Respostas prováveis dos alunos:** [mais ou menos; não é exato]

Se os alunos não responderem corretamente, o professor deve provocar uma discussão sobre o significado da palavra “aproximadamente”: ter ideia de quantos são; estar próximo de; cerca de; pode ser uma quantidade em torno de; usar o exemplo da estimativa de pessoas em uma multidão – por exemplo passeatas, Ano Novo, shows.

- O professor solicitará que os alunos tentem resolver em conjunto, convencendo os outros colegas do grupo sobre a estratégia e registrando todo o processo de solução no papel deles. (de 15 a 20 minutos). O professor visitará os grupos para auxiliar com questionamentos e para verificar os grupos que estão com raciocínio correto ou não.

- O professor convidará os grupos para apresentarem seus

raciocínios na lousa. Chamar todos os grupos, mas incentivar, principalmente, aqueles em que ele tenha percebido erros/acertos durante as visitas. Se determinado grupo não quiser apresentar o processo de solução, o professor explicará para a turma como se ele estivesse especulando (Ex.: E se eu fizesse assim?... [apresentar para a turma o modo errado/certo do grupo que não se apresentou]). Todas as estratégias apresentadas (certas ou erradas) devem ser mantidas na lousa.

### OBSERVAÇÕES

- Observar as estratégias dos alunos enquanto resolvem em conjunto o problema. Verificar os grupos que estejam apresentando acertos/erros.

- O professor deve fazer a conexão com as diferentes estratégias realizadas, depois que os grupos apresentarem. O *neriage* só se concretiza com a síntese de todas as ideias.

- As soluções dos grupos devem ser mantidas na lousa (*bansho*). Na verdade, no fim da aula o professor deve retomar o problema, onde se queria chegar, retomar todas as estratégias encontradas no grupo e concluir com a síntese realizada no *neriage*. O professor, se for o caso, vai construir a resposta correta e completa do problema a partir da produção dos alunos e conjuntamente com a turma.

- Caso surja algum obstáculo de compreensão, matemática ou não, o professor deve parar e resolver aquela dúvida.

- Algumas inferências que o professor poderá usar durante o *neriage*:

**Professor:** a partir dos valores encontrados pelos alunos, questioná-los sobre o processo de construção de sua solução: “Por que você multiplicou? O que significa esse cálculo? etc.

**Professor:** se algum aluno chegar à resposta correta (179,14...), o professor questionará: é possível Flora ter

179,14 peixes?

Professor: Após os dois mergulhos da rede, é possível garantir a quantidade mínima de peixes no aquário? Se sim, quantos seriam?

Professor: Flora retirou quantos peixes da primeira vez? Então...

Professor: [se os alunos encontraram  $38 + 33$  ou  $38 + 26$  como resposta] O problema quer saber a quantidade mínima de peixes ou a quantidade aproximada de peixes no aquário?

Flora retirou 38 peixes na primeira retirada e eles foram marcados. Na segunda retirada vieram 7 peixes marcados daqueles 38, mais 26 não marcados. Logo, podemos afirmar haver no mínimo  $38 + (33 - 7) = 64$  peixes no aquário. Se Flora só tivesse esses peixes, ela já saberia a quantidade de peixes. Mas ela não conseguiu contá-los, então ela tem mais peixes do que 64.

Professor: se o resultado do cálculo fosse um número inteiro (por exemplo 179), continuaria sendo um valor aproximado do total de peixes no aquário?

Discutir o significado da aproximação, quando é possível ser aproximado para o inteiro inferior e quando para o superior (lembrar do problema da quantidade de soldados sendo transportados em caminhões – a aproximação deverá ser sempre para o inteiro posterior e nunca para o inferior, pois um soldado não seria transportado se for aproximado para o inteiro imediatamente inferior).

## ESTRATÉGIAS ENCONTRADAS PELOS PROFESSORES PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Estratégia 1: por equação.

Estratégia 2: por regra de três.

Estratégia 3: por proporção pictórica – a proporção dos 38 peixes marcados para o total de peixes no aquário é a mesma proporção dos 7 peixes marcados para os 33 capturados.

Estratégia 4: por relação entre peixes marcados e não marcados.

Estratégia 5: por proporção entre peixes capturados e peixes com marcas.

Estratégia 6: por porcentagem.

## AULA PILOTO MINISTRADA COM O GRUPO DE PROFESSORES

Identificação de dificuldades para a aula com os alunos: compreensão das relações entre os dados do problema.

Opções: iniciar a explicação após o *neriage* pela solução pictórica. Dessa estratégia, conectar com a solução via regra de três, equações etc.

## ANEXO 1 – FOLHA A SER ENTREGUE NO INÍCIO DA AULA PARA CADA ALUNO

Flora gosta muito de peixes. O maior dos seus aquários é para os peixes vermelhos. São muitos e como estão sempre em movimento Flora não consegue ter ideia de quantos são, mas gostaria de saber a quantidade aproximada.

Resolveu então fazer o seguinte: mergulhou uma pequena rede e apanhou alguns peixes. Ao contá-los constatou serem 38. Com uma tinta permanente, marcou-os na cauda com um ponto preto. Voltou a lançá-los no aquário e eles se misturaram com

os que lá tinham ficado.

No dia seguinte, mergulhou de novo a mesma rede e desta vez contou 33 peixes. Destes, 7 tinham a marca preta. Aproximadamente, quantos peixes vermelhos tem Flora?

#### ANEXO 2 – AVALIAÇÃO

[Entregar aos alunos uma folha A4 contendo duas tarefas. A avaliação deve ser resolvida individualmente. Na primeira, ele deve marcar como verdadeiro ou falso afirmações relativas ao texto do problema para avaliarmos a compreensão do problema. Na segunda, eles devem resolvê-lo (descrevendo o procedimento)].

ALUNO(A): \_\_\_\_\_

Flora gosta muito de peixes. O maior dos seus aquários é para os peixes vermelhos. São muitos e como estão sempre em movimento Flora não consegue ter ideia de quantos são, mas gostaria de saber a quantidade aproximada.

Resolveu então fazer o seguinte: mergulhou uma pequena rede e apanhou alguns peixes. Ao contá-los constatou serem 38. Com uma tinta permanente, marcou-os na cauda com um ponto preto. Voltou a lançá-los no aquário e eles se misturaram com os que lá tinham ficado.

No dia seguinte, mergulhou de novo a mesma rede e desta vez contou 33 peixes. Destes, 7 tinham a marca preta. Aproximadamente, quantos peixes vermelhos tem Flora?

Parte I: De acordo com o texto acima, responda cada item com V para afirmações verdadeiras e F para as falsas:

- ( ) A palavra “aproximadamente” significa que Flora quer conhecer exatamente quantos peixes vermelhos há no aquário.
- ( ) Flora só possui peixes vermelhos.
- ( ) Flora possui mais de um aquário.

- ( ) Flora marcou todos os peixes vermelhos.
- ( ) Flora marcou com ponto preto a cauda de 38 peixes.
- ( ) Flora possui, no mínimo, 64 peixes vermelhos.

Parte II: Resolva o problema descrevendo todos os passos para sua solução (use o verso da folha, se necessitar).

Solução da primeira questão:

Parte I: De acordo com o texto acima, responda cada item com V para afirmações verdadeiras e F para as falsas:

- ( F ) A palavra “aproximadamente” significa que Flora quer conhecer exatamente quantos peixes vermelhos há no aquário.
- ( F ) Flora só possui peixes vermelhos.
- ( V ) Flora possui mais de um aquário.
- ( F ) Flora marcou todos os peixes vermelhos.
- ( V ) Flora marcou com ponto preto a cauda de 38 peixes.
- ( V ) Flora possui, no mínimo, 64 peixes vermelhos.

### ANEXO 3: AVALIAÇÃO POSTERIOR À AULA

[Entregar aos alunos uma folha A4 contendo O PROBLEMA DA LAGOA. A avaliação deve ser resolvida individualmente. Os alunos devem resolvê-lo (descrevendo o procedimento)].

ALUNO(A): \_\_\_\_\_

Quarenta peixes foram capturados em uma lagoa através de uma rede. Cada um deles foi identificado e devolvido para a lagoa. Em outro dia, sessenta peixes foram retirados dessa mesma lagoa utilizando uma rede. Entre esses peixes, quatro possuíam identificação. Como é possível estimar, aproximadamente, o número de peixes da lagoa?

## **A AULA**

Com o planejamento em mãos e estudado por todos, era hora de executá-lo. A professora, previamente escolhida pelo grupo para ministrar a aula, deu início às atividades, enquanto os outros a observavam sem interferir. Eles se posicionaram no fundo e na lateral da sala, de modo a não se misturarem entre alunos e a professora regente (Figura 15). Essa era uma preocupação do grupo para que os alunos se sentissem mais à vontade durante a aula. Os professores-observadores tinham o compromisso de procurar acompanhar a aprendizagem dos alunos pelos seus discursos, gestos, olhares ou quaisquer outros modos que expressassem a construção do conhecimento, bem como possíveis dificuldades enfrentadas, tomando notas que foram objeto de reflexão em momento posterior à aula.

Figura 15. Professores observando a execução da aula.



A aula aconteceu em dia reservado à Formação de Professores, o que permitiu que o grupo de professores estivesse presente. Como este era um dia em que a professora não atuava na sala de aula, ela solicitou as duas aulas (de 07h50 às 09h30) a um colega.

Com as carteiras previamente organizadas em grupos, os alunos naturalmente foram ocupando o espaço (Figura 16). A professora iniciou a aula distribuindo o problema impresso e pedindo que os alunos o lessem individualmente. Em seguida, pediu que um deles lesse em voz alta para a turma. A professora repetiu a leitura já realizada duas vezes.

Figura 16. Organização física da sala de aula.



A leitura de textos pelo professor para os alunos é um hábito que pode não ter as consequências esperadas, por privá-los de realizarem tarefas cognitivas importantes para seu desen-

volvimento. Talvez porque nossos alunos apresentem dificuldades de decodificação e interpretação<sup>36</sup>, os professores tentam suprir essa deficiência realizando uma ação que deveria ser realizada pelos próprios alunos.

Ler para os alunos retira-lhes a oportunidade de desenvolvimento dessa importante habilidade, seja para a Matemática, seja para quaisquer outras situações. Professores que ministram aulas sob o modelo *Lesson Study* são encorajados a promover e estimular o conhecimento. Ao contrário, a professora sendo fiel ao hábito, e talvez pela insegurança de eles não terem a habilidade esperada, proferiu à leitura e prosseguiu com o planejamento.

Logo após, questionou-os sobre palavras, expressões e trechos que poderiam ter causado dúvidas, conforme previsto. Os alunos não apresentaram qualquer dificuldade para o entendimento do texto do problema.

Durante a verificação da compreensão do problema, era prevista a preocupação da professora em promover a participação de toda a turma. No entanto, percebemos que alguns alunos se antecipavam e tentavam resolvê-lo (Figura 17), não demonstrando se importar com as indagações da professora.

Figura 17. Primeiro momento de aula.

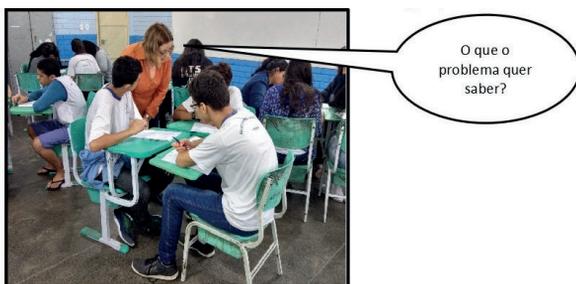


<sup>36</sup> Hoffmann (2015)

O comportamento destes alunos é comum em sociedades que priorizam os resultados em detrimento do processo de construção de soluções. Alguns países apresentam essa cultura do acerto, enquanto outras sociedades valorizam o desenvolvimento, o decurso da construção do pensamento, mesmo que resulte em soluções equivocadas dos problemas e no erro como oportunidade de aprendizagem<sup>37</sup>.

Após a abordagem dos possíveis obstáculos textuais, a professora solicitou que os alunos resolvessem o problema interagindo com os colegas do grupo. Ela visitou todos os grupos (Figura 18) verificando a linha e raciocínio de cada um, auxiliando-os com questionamentos que os guiassem na compreensão e elaboração de uma estratégia (primeira e segunda etapas das heurísticas de Polya).

Figura 18. Professora interagindo com os grupos de alunos.



O grupo observou que alguns alunos não se interessaram em participar da compreensão do texto promovido pela professora. Mas demonstraram, posteriormente, necessitar do auxílio dela, que os guiou por questionamentos.

---

<sup>37</sup> Stigler e Hiebert (1998).

Após cerca de 25 minutos dados para que os alunos tentassem resolver o problema em grupo, a professora convidou cada grupo para apresentar suas estratégias na lousa (Figura 19), etapa do *Lesson Study*, denominada *bansho*. Ela deveria ter solicitado que cada grupo explicasse para a turma como imaginaram resolvê-lo. Ao contrário, ela solicitou que os grupos dispusessem na lousa suas resoluções e que explicassem para ela, em particular, ferindo a etapa chamada *neriage*. Esse deveria ser o momento em que os alunos, monitorados pelo professor, compartilhassem seus entendimentos, analisassem, comparassem e contrastassem criticamente essas ideias, considerando questões como eficiência, generalização e semelhança, com o que foi aprendido. Ao final, teríamos uma conclusão coletiva apurada por todos, formalizada pelo professor em uma síntese.

Figura 19. *Neriage*.

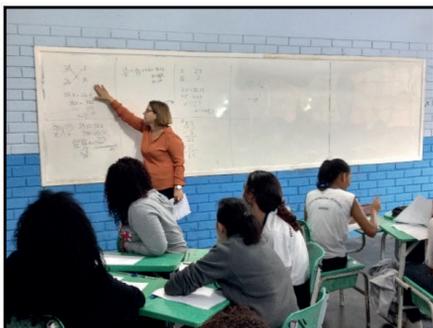


A inobservância do que seja o *neriage* acabou por comprometer a plena discussão e interação entre os grupos. Isso poderia ter sido evitado se a fase do *neriage* tivesse sido explicitada

no planejamento de aula e simulada na aula piloto. Apesar disso, a simples disposição na lousa (*bansho*) permitiu, ao menos, que a turma acessasse o modo como os grupos idealizaram seus raciocínios. Após a disposição na lousa, a professora explicou como cada grupo pensou, questionando-os sobre equívocos, acertos etc (Figura 20).

Da maneira que os japoneses idealizam e executam o *neriage*, não é a professora que explica as estratégias dos alunos, mas é ela que promove a compreensão dos alunos sobre as diversas estratégias e resoluções apresentadas, conduzindo a participação da classe. No Japão, os erros e acertos são discutidos pelos alunos, e não apontados pela professora. Assim, os alunos aprendem e consolidam a matemática do problema.

Figura 20. Professora sintetizando as estratégias dos alunos.



As estratégias apresentadas pelos grupos na lousa levam a crer que alguns grupos compreenderam o problema, outros não. As Figuras 21 a 27 mostram as estratégias de cada grupo ao lado de ponderações a posteriori realizadas pelas autoras durante a escrita do livro.

Figura 21. Estratégia de um grupo de alunos.

$$\begin{array}{r} 33 \\ 7 \\ \hline 38 \end{array}$$

$$7x = 38.33$$

$$7x = 1254$$

$$x = \frac{1254}{7}$$

$$x = 179,1 = (180)$$

Esse grupo adotou uma das estratégias imaginadas pelos professores. Aproximaram a solução encontrada para o inteiro posterior e não usaram a simbologia matemática de aproximação.

Figura 22. Quantidade mínima de peixes.

Essa solução ocorreu com alguns professores na época do planejamento. Os professores acreditaram ter encontrado a estimativa, mas, na verdade, haviam encontrado a quantidade mínima de peixes.

$$\begin{array}{r} 83 \\ - 7 \\ \hline 26 \\ + 38 \\ \hline 64 \end{array}$$

Figura 23. Estratégia com uso incorreto de símbolos matemáticos.

Esse grupo adotou uma das estratégias pensadas pelos professores alcançando a resposta correta, mas o uso do sinal de igual (=) neste local demonstra necessidade de discussão sobre a linguagem matemática. Havia essa previsão no planejamento, mas a professora não realizou a abordagem, provavelmente em função do pouco tempo de aula.

$$\frac{38}{7} = \frac{7}{33} = 7x = 38.33$$

$$x = \frac{1254}{7}$$

$$x = 179$$
  

$$\begin{array}{r} 38 \\ \times 33 \\ \hline 114 \\ 114 \\ \hline 1254 \end{array}$$

Figura 24. Estratégia equivocada de um grupo de alunos.

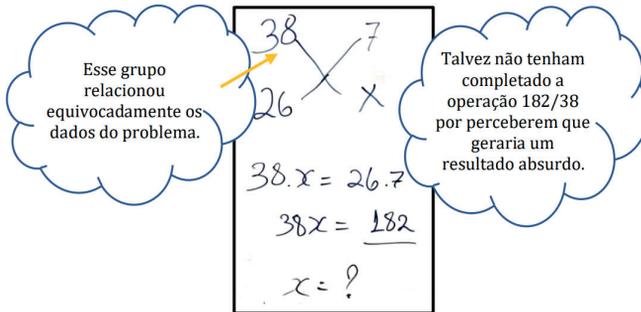


Figura 25. Outra estratégia de alunos.

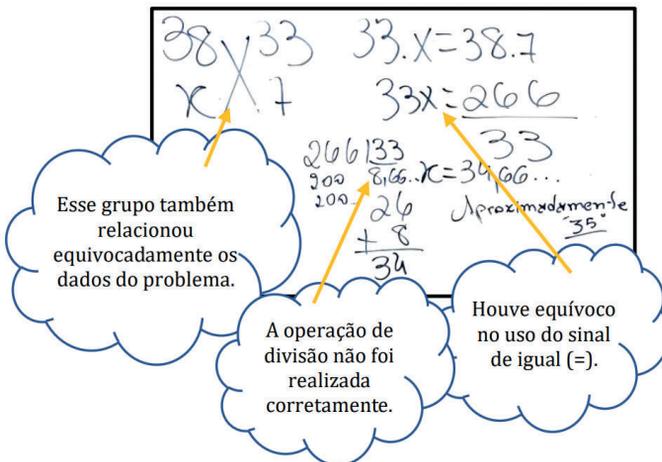


Figura 26. Estratégia equivocada com o uso da quantidade mínima de peixes.

$$\frac{64}{7} = \frac{33}{x}$$

$$64x = 33 \cdot 7$$

$$x = \frac{328}{64}$$

A presença do "64" na relação leva a crer terem encontrado a quantidade mínima de peixes para só então prosseguirem com outras relações equivocadas.

Figura 27. Relação entre quantidades mal empregada.

$$\frac{38}{26} = \frac{7}{x}$$

$$38 \cdot x = 26 \cdot 7$$

$$38x = 182$$

$$x = \frac{182}{38}$$

$$x = 4$$

Mais uma vez, a relação encontrada está equivocada na associação de peixes marcados e de peixes não marcados.

O resultado encontrado é um absurdo, pois se foram retirados 38 peixes da primeira vez, como o aquário poderia ter apenas 4 peixes aproximadamente?

Os alunos, de modo geral, não estabeleceram uma relação adequada entre

- peixes marcados e não marcados;
- a quantidade de peixes capturados da primeira vez (38) com a quantidade aproximada de peixes no aquário ( $x$ ). E a quantidade de peixes capturados pela segunda vez (7) e os peixes ali marcados (33).

Esse cenário pode estar relacionado com falhas na aprendizagem da relação entre quantidades, ou seja, há uma possível memorização sem significado da regra do produto dos meios pelos extremos. É fundamental perceber as relações entre os termos de uma proporção<sup>38</sup> para evitar os equívocos pelos grupos. Assim, não se pode garantir que os alunos que chegaram à solução do problema tenham realizado acertadamente as relações, ou seguido o procedimento correto pelo acaso. Entrevistas com os alunos poderiam elucidar esta questão.

Por sua vez, a professora interferiu explicando as possíveis corretas relações, mas não destacou o absurdo do resultado encontrado por esses alunos, mesmo não tendo sido imaginado pelos professores quando da elaboração do planejamento. Esse tipo de intervenção demanda tempo de estudo dos professores para que as ideias amadureçam e é justamente esse um dos propósitos do *Lesson Study* no que diz respeito à formação continuada: estudar e praticar os processos de ensino e a própria matemática de modo colaborativo nos mais diferentes conteúdos matemáticos, sobretudo naqueles que mais apresentam dificuldades para o ensino e, conseqüentemente, para a aprendizagem.

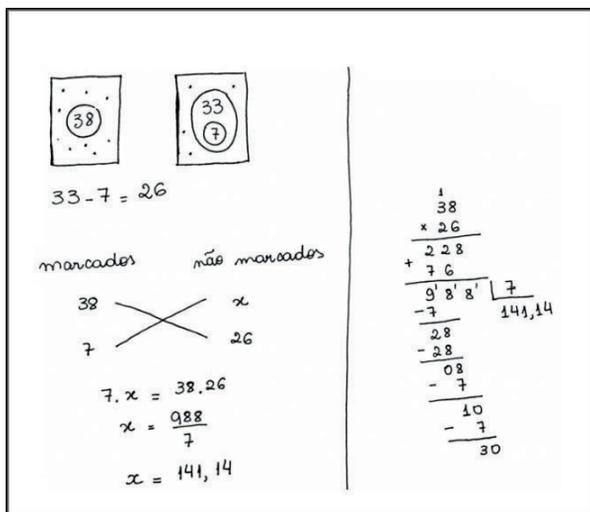
O pouco tempo de aula concorreu negativamente para a profundidade do tema e das ações planejadas. Com a proximi-

---

<sup>38</sup> Villarreal et al. (2005).

dade do término do tempo de aula, a professora tomou as estratégias não contempladas pelos alunos, buscando ampliar suas compreensões e o repertório de estratégias, a iniciar pela abordagem pictórica e sua respectiva operação de divisão, conforme planejado (Figura 28).

Figura 28. Apresentação de estratégia pictórica.



Embora a professora não tenha anotado na lousa, a resposta matemática do problema (179,14), a resposta interpretativa (aproximadamente 180 peixes) e o significado de x (quantidade de peixes não marcados) foram mencionados oralmente por ela. O registro na lousa é uma indicação do *Lesson Study*, mas foi um esquecimento da professora.

Em seguida, ela conectou somente a estratégia pictórica com o que foi feito por cada grupo, destacando os equívocos e correções produzidos por eles. A professora chamou atenção para a relação correta entre as quantidades e expôs o algoritmo de divisão e multiplicação para os alunos. A aula expositiva e não dialogada é uma prática comum na cultura escolar brasileira.

Por fim, após a concordância dos alunos para suas explicações, a professora os convidou a colocar novamente suas carteiras enfileiradas a fim de realizarem avaliações escritas, como veremos a seguir.

## **AVALIAÇÃO**

Houve tempo dentro dos 100 minutos de aula para a aplicação da avaliação individual, incluindo a resolução do novo problema (problema da lagoa), composta pelos seguintes itens:

1- responder 6 afirmações sobre o texto do problema dos **Peixes para Contar e Estimar** a fim de avaliar a compreensão;

2- resolver o problema dos **Peixes para Contar e Estimar** para avaliar se o aluno compreendeu alguma das estratégias apresentadas;

3- resolver o problema da lagoa como uma aplicação das estratégias em um problema similar.

Sobre a compreensão textual do problema dos **Peixes para Contar e Estimar** (Parte I da avaliação), 7 alunos responderam corretamente às 6 afirmações, 5 erraram apenas uma, 4 erraram duas e 4 erraram três. A concentração de erros esteve nas afirmações 1, 3 e 4.

Afirmação 1: A palavra “aproximadamente” significa que Flora quer conhecer exatamente quantos peixes vermelhos há no aquário. (7 erros).

Essa afirmação é falsa, pois o problema era explícito quanto ao termo “aproximadamente”. É possível que esses alunos ainda não tenham compreendido o significado literal e matemático dessa palavra.

Afirmação 3: Flora possui mais de um aquário (6 erros).

Essa afirmação é verdadeira e o aluno deveria interpretar o trecho que dizia “...o maior de seus aquários...”, pois já seria uma indicação de Flora possuir mais de um.

Afirmção 4: Flora marcou todos os peixes vermelhos (6 erros).

Essa afirmação é falsa, pois Flora marcou apenas 38 peixes e não todos os peixes. O aluno deveria inferir a partir do trecho "...marcou-os na cauda com um ponto preto" se referindo aos 38 peixes capturados pela primeira vez.

Em relação à resolução e à solução alcançada no problema dos **Peixes para Contar e Estimar**, verificamos que:

- 3 alunos deixaram em branco a resolução e 17 resolveram pela relação entre quantidades e alcançaram a solução correta. (Figura 29).

Figura 29. Estratégia correta apresentada por um grupo de alunos.

Handwritten mathematical work showing a subtraction, a multiplication, and a division. The subtraction is  $33 - 7 = 26$ . The multiplication is  $38 \times 7 = 266$ . The division is  $266 \div 7 = 38$ . The final result is  $179,14$ .

A análise do desempenho dos alunos no problema da lagoa revelou que:

- Os mesmos 3 alunos que deixaram em branco a resolução do problema dos **Peixes para Contar e Estimar**, erraram os caminhos eleitos para a solução do problema da lagoa. Eles realizaram ações de multiplicação e/ou equação com uso dos dados do problema, mas de difícil compreensão por suas opções.

• 13 dos 17 alunos que acertaram a resolução dos peixes, relacionaram corretamente os dados do problema da lagoa.

• Desses 13 alunos, 7 alcançaram a solução correta e 6 erraram a operação de divisão ao final do processo.

• Por fim, dos 4 alunos que se equivocaram no processo de solução: 3 relacionaram incorretamente as quantidades, repetindo esse comportamento da resolução do problema dos peixes e; 1 realizou manobras com operação de soma sem uma estrutura que nos permitisse interpretar seu pensamento.

Em meio às análises, alguns fatos chamaram a atenção. Um aluno declarou a resposta correta, mas acrescentou à resposta de 179 ou 180 que “nosso raciocínio foi de que há mais de 64 peixes no aquário”. Trata-se de uma inferência absolutamente correta, embora não prevista pelos professores quando elaboraram a questão. As culturas brasileiras de ensino da Matemática tendem a desqualificar essas interpretações, em lugar de legitimá-las e chamar atenção para outras possíveis<sup>39</sup>. Outro aluno, apesar de também apresentar a solução correta, declarou que “...o mínimo é de 64 peixes”. Além dessas observações, verificamos que apenas 3 alunos usaram a simbologia matemática de aproximação (Figura 30).

Figura 30. Uso do símbolo de aproximação pelos alunos.

The image shows a student's handwritten work on a piece of paper. It contains several mathematical expressions and calculations:

- Top left: "maneador" above "38" and "7", with a large 'X' drawn over them.
- Top middle: "X" above "33".
- Top right: "7. X = 38.33", "7x = 1254", and "x = 1254 / 7".
- Middle left: A vertical multiplication of 238 by 33, resulting in 114 and 114, with a total of 1254.
- Middle: "1254 17" above "55", "64", "10", "30", and "2".
- Middle right: "179,12" and "x = 179,12 ≈ 180", where "180" is circled in yellow.

O olhar sobre o desempenho dos alunos remete à análise da potencialidade do planejamento e da execução da aula que faremos em meio à reflexão do grupo de professores, conforme a próxima seção.

<sup>39</sup> Giraldo (2018).

## REFLEXÃO SOBRE O PLANEJAMENTO E A EXECUÇÃO

Terminada a aula, os alunos foram dispensados para o recreio e o grupo de professores se reuniu na mesma sala de aula para conversar sobre a experiência vivida, caracterizando a terceira etapa do *Lesson Study* – a reflexão e discussão (Figura 31).

Figura 31. Reflexão sobre a aula.



O grupo de professores constatou que, de um modo geral, a execução da aula esteve em sintonia com o planejamento e mostrou-se favorável aos estímulos que desejava empreender sobre os alunos: organização do raciocínio, desenvolvimento da autonomia, construção de representações matemáticas, atenção ao texto do problema, apropriação de diferentes estratégias, para falar de alguns dos principais ingredientes. Mas, também apontou algumas observações sobre questões que merecem melhorias.

Os professores constataram que o tempo de 100 minutos para a aula não foi suficiente para a plena execução de todo o planejamento, por exemplo aprofundamentos importantes como o algoritmo da divisão, a discussão sobre as relações entre os dados do problema, a retomada da simbologia matemática de

aproximação, a identificação das grandezas envolvidas, entre outros elementos. O encaminhamento dado foi o de repensar se todo o planejamento deveria ser executado no mesmo dia. Concluíram que o particionamento em dias diferentes poderia trazer benefícios para a aprendizagem dos alunos.

Apesar do pouco tempo de aula, o grupo avaliou positivamente o modo eleito no planejamento para as conexões entre as diferentes estratégias. Os alunos pareceram compreender mais e melhor após a discussão conduzida pela professora sobre a estratégia pictórica não contemplada pelos alunos e suas produções de conhecimento. Acreditamos que realmente essa ação tenha sido benéfica face aos resultados das duas avaliações individuais ao final da aula. No entanto, a resolução via porcentagem não foi explorada pela professora.

O breve tempo de aula e a pouca experiência do grupo de professores com *neriage* podem ter sido corresponsáveis pela discussão pouco aprofundada e pela baixa interação entre os grupos. O *neriage* é momento crucial da aula por ensejar trocas de experiências, confronto de ideias e conhecimento de outros modos de pensar pelos próprios alunos, e não por meio da condução via interpretações da professora. Trata-se de um momento importante para promover raciocínio autônomo e comunicação de ideias matemáticas, além de desconstruir o paradigma do ensino centrado no professor, que explica o certo e aponta o errado, reestruturando o ensino para um modelo no qual o aluno sabe o que está aprendendo, como deve fazê-lo e para quê.

Essa estrutura de aula que privilegia a discussão, ao invés do monólogo, e a disposição física em rodas, ao invés de em fileiras, é muito diferente das culturas de ensino de matemática no Brasil, que, ao contrário, preconizam a fala isolada do professor enquanto os alunos devem ficar em silêncio.

Talvez pela própria cultura escolar brasileira, na qual a exposição de possíveis erros é mal vista, a professora optou por abordar os alunos individualmente na lousa. A literatura sobre o *Lesson Study* defende que os próprios alunos devam apresentar suas ideias para a turma e fomentar a discussão, estimulando autonomia, independência, pró-atividade e espírito colaborativo.

Pelo lado estrutural da sala de aula, o grupo destacou que a disposição das carteiras não beneficiou as trocas entre os grupos. É verdade que o agrupamento em 3 alunos foi positivo, mas ocorreu algum isolamento intergrupos. Nesse momento, uma das professoras-pesquisadoras sugeriu que, para uma edição futura de aula, as carteiras fossem dispostas em semicircunferência (Figura 32), mantendo os alunos ainda assim agrupados dois a dois. Essa disposição foi vivida em experiência em outra aula construída e executada à luz do *Lesson Study*<sup>40</sup> e houve promoção naquela aula dos aspectos julgados perdidos pelo grupo nesta aula.

Figura 32. Sugestão de disposição física da sala de aula.



---

<sup>40</sup> Mello (2018).

Os professores perceberam que os alunos que acertaram a solução do problema pararam de prestar atenção às inferências da professora, sobretudo no momento da conexão entre as estratégias. Esse comportamento parece ser cultural. Alunos e professores brasileiros são acostumados/estimulados a buscar respostas corretas, enquanto o indicado é a valorização do processo de construção do pensamento, pois é este que conduzirá à solução correta. Para brasileiros, em geral, o problema termina com a solução correta. Para japoneses, não. Isso explica o fato de alunos terem parado de acompanhar a aula após terem ciência de que haviam alcançado a solução correta.

Outros detalhes foram trazidos à tona. O grupo ponderou que as observações importantes da aula deveriam estar registradas na lousa, para além das estratégias. Por exemplo, os termos destacados do texto, a simbologia de aproximação, a discussão sobre as marcas dos peixes etc. Essa constatação demonstra amadurecimento do grupo à luz do que seja, de fato, o *Lesson Study*. Esse modelo valoriza esse tipo de ação como um meio de organização mental pelos aspectos visuais.

Por fim, ao identificarem recorrentes problemas com a operação de divisão com aqueles alunos, o grupo decidiu que esse tema mereceria uma construção conjunta e colaborativa de uma aula à luz do *Lesson Study*.

## UM BALANÇO FINAL...

Reservamos esse espaço do livro para refletir sobre a essência da experiência com o problema dos **Peixes para Contar e Estimar** no que diz respeito à formação continuada de professores.

O modelo original de *Lesson Study* é situado nos contextos culturais japoneses (no sentido mais geral e no sentido educacional mais especificamente). Nossa ideia não é replicar o modelo seguindo exatamente seus passos, e sim entender sua essência, seus pressupostos e objetivos, e adaptá-los para o contexto cultural brasileiro.

As atitudes de professores e alunos refletem as culturas educacionais brasileiras. Por exemplo, o significado do termo aproximação e a resistência em aceitar que o resultado do problema não é o valor preciso do número de peixes; a preferência do resultado em detrimento do processo de construção do raciocínio matemático; a dificuldade em aceitar abordagens pictóricas como legítimas; a atitude da professora em “ler para os alunos” e dar respostas com pouco tempo para os alunos pensarem; a barreira dos alunos em se engajarem em uma discussão coletiva

com a turma; o impulso em achar logo a solução da forma mais rápida e fácil; a pouca exploração do *neriage*, considerando que saberes matemáticos os alunos podem estar produzindo, para além da usual classificação entre “certo” e “errado”; o impulso de se fazer coisas “da forma como se está acostumado”.

Os alunos pareciam alheios às discussões sobre a compreensão do texto do problema e já investiam todo o tempo na tentativa de solucioná-lo. A Psicologia Cognitiva nos ensina que bons resolvedores de problemas são os que investem mais tempo em sua compreensão e valorizam o processo de construção do pensamento, pois é este que conduzirá à solução correta<sup>41</sup>.

Nesse sentido, sublinhamos outra vertente que se faz presente em salas de aula brasileiras: o individualismo e a dificuldade de se trabalhar em grupo. A cultura de não pensar no coletivo nos leva a questionar os objetivos educacionais brasileiros – nós, profissionais da Educação, educamos para quê? E para quem? Para viver em coletividade ou para ascensão social? Essa parece ser uma questão crucial e que pode dificultar a aplicação plena da essência do *Lesson Study* como um potencializador da aprendizagem de alunos e da formação continuada de professores.

A prática de *Lesson Study* com esse grupo de professores não foi a primeira e, nessa trajetória, constatamos maior maturidade com a elaboração do planejamento e com os cuidados ao ministrar a aula. A reflexão pós-aula reforça nossa constatação de progresso, por exemplo, por identificarem pontos do planejamento e execução que podem e devem ser melhorados.

Apesar dos progressos mencionados, ainda destacamos as repetidas dificuldades para que algum professor aceitasse ministrar a aula. As justificativas apresentadas variavam entre

---

<sup>41</sup> Krutetskii (1976).

obstáculos com a direção escolar, o fato de a aula ocorrer no final do trimestre escolar, a estrutura física precária da escola, as turmas não corresponderem ao ano escolar eleito no planejamento, entre outras. Talvez essas justificativas escondam o receio que alguns professores ainda apresentam de serem observados em suas salas de aula.

O potencial do *Lesson Study* como um modelo de formação continuada de professores se constitui com base na investigação sobre a própria prática em que os próprios professores têm um papel de autoria em relação à própria formação. Outros modelos se limitam a repetir o conteúdo matemático da graduação, sem qualquer reflexão sobre a escola. Desta forma, o *Lesson Study* tem o potencial de transformar ao mesmo tempo a formação continuada e a prática, na medida em que promove as reflexões sobre a prática em uma postura investigativa – que não apenas reflete, mas também se propõe a transformar.

Mais especificamente, com relação à formação continuada, acreditamos que sejam necessárias outras providências para que as ações de *neriage* sejam mais efetivas. Foi consenso entre nós e o grupo de professores de que a interação dos alunos durante a aula não foi orquestrada como reza o modelo. Quando os estudantes foram convidados a apresentar suas soluções na lousa, a professora discutiu os erros e acertos de cada grupo somente com eles, não envolvendo, como era previsto, os demais alunos da turma, o que se caracteriza, de fato, com os propósitos do *neriage*. Mas, ao contrário, o *bansho* foi bem conduzido, a professora organizou e explorou toda a produção dos alunos, levando-os a refletir sobre cada uma delas e sintetizando-as.

Esses fatos demonstram a necessidade de nosso replanejamento sobre algumas ações ao longo da formação continuada, sobretudo no que diz respeito ao *neriage*. Apesar de a professora ter simulado a aula com todo o grupo de professores, essa ação

não foi suficiente para uma prática que se aproximasse de um verdadeiro *neriage*.

Os resultados alcançados na formação indicam a potencialidade do *Lesson Study* para uma nova, e mais efetiva, postura do professor frente aos objetivos educacionais e matemáticos que queremos. No entanto, vale refletir que as diferenças culturais entre Brasil e Japão fortalecem nossa ideia de que não se trata de uma importação de modelo, mas, sim, do aproveitamento de ideias e ajustes do que for possível à realidade cultural e do sistema educacional brasileiro.

## SEM LIMITES

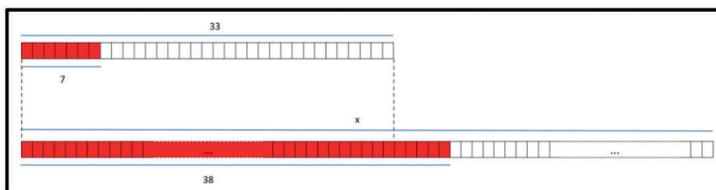
O problema dos **Peixes para Contar e Estimar** considera duas suposições que não estão explícitas no texto: que o número de peixes é constante entre as duas retiradas (isto é, que nenhum peixe nasce nem morre), e que os peixes marcados se distribuem de forma homogênea entre os demais. Em aplicações futuras do problema, sugerimos que essa discussão seja realizada com os professores na reunião de planejamento e com os alunos durante as aulas.

Pelo lado cognitivo, o problema estudado não apresenta uma representação mental clara para sua solução, como destacamos no início do texto. A não existência de um algoritmo preestabelecido para resolvê-lo nos leva a muitas possíveis estratégias para solucioná-lo, o que permite trabalhar com a diversidade de abordagens e o alargamento do pensamento matemático do aluno. Exatamente por ter essa natureza, novos modos de resolução podem surgir. Foi o que aconteceu durante a escrita do livro.

Após a formação continuada, vislumbramos uma representação por meio de imagens que poderia ajudar os

alunos a compreender a relação de proporcionalidade existente no problema (Figura 33). Não se trata de uma nova estratégia, mas de um auxílio visual para as estratégias já pensadas e expostas no texto.

Figura 33. Apoio visual para a resolução do problema.



A Figura 33 pode levar os alunos a três comparações distintas:

1. Comparação entre as retiradas de peixes:

2ª retirada	=	1ª retirada
$\frac{7}{33}$		$\frac{38}{x}$
$\therefore x = \frac{33 \cdot 38}{7}$		
$x \cong 179,14$		

2. Comparação entre peixes marcados e total de peixes:

Peixes marcados	=	Total de peixes
$\frac{7}{38}$		$\frac{33}{x}$
$\therefore x = \frac{33 \cdot 38}{7}$		
$x \cong 179,14$		

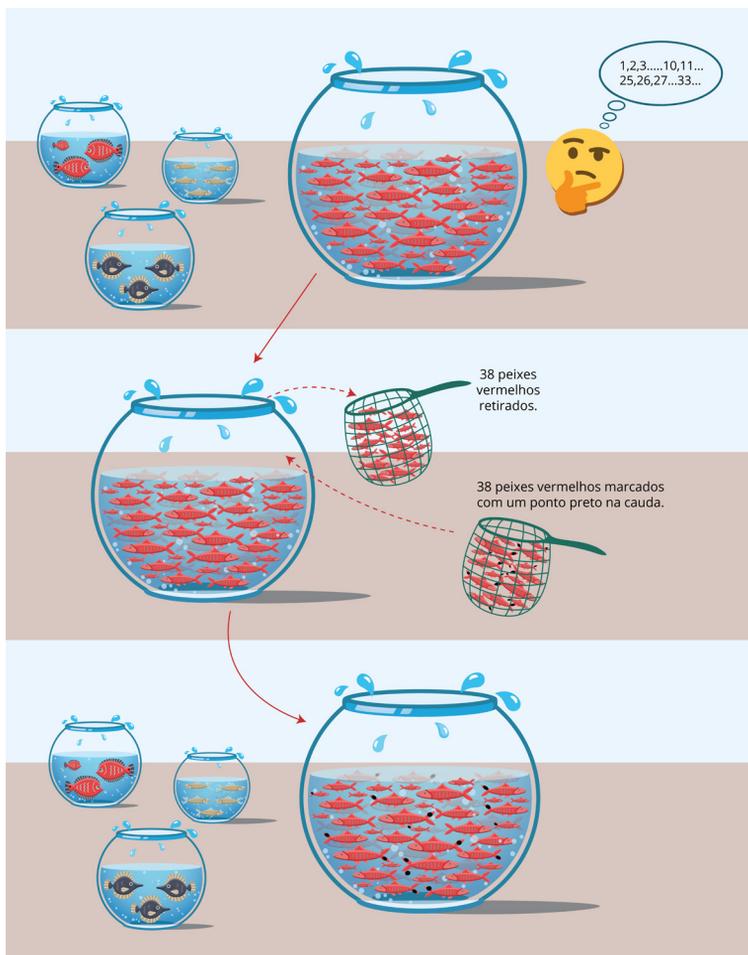
### 3. Comparação entre peixes marcados e não marcados:

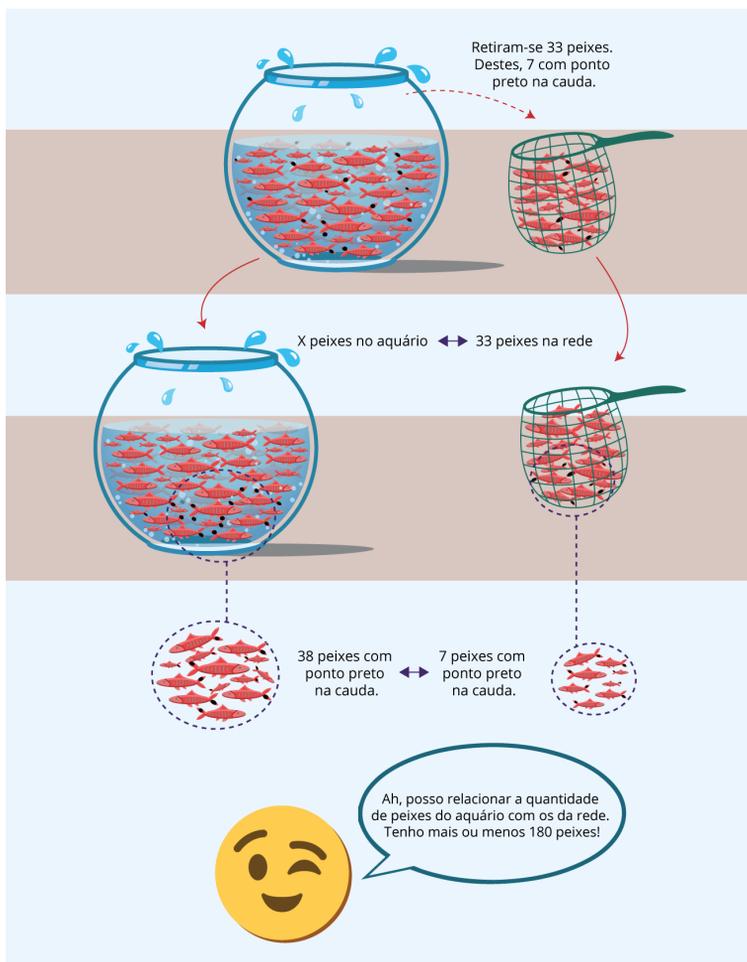
Peixes marcados		Peixes não marcados
$\frac{7}{38}$	=	$\frac{33-7}{x-38}$
$7 \cdot (x - 38) = 38 \cdot 26$		
$x = 38 + \frac{38 \cdot 26}{7}$		
$\therefore x \cong 179,14$		

Essas três formas de representação podem ser realizadas porque as grandezas são proporcionais entre si. Entretanto, na primeira comparação, a constante de proporcionalidade é 0,21. Na segunda, é 0,18. E na terceira, essa constante vale  $7/38$ , aproximadamente 0,18 (e não exatamente). Essa é uma discussão que foi feita anteriormente no texto.

Além desse apoio visual, as autoras desenvolveram uma solução para o problema com ênfase em sequência de imagens (Figura 34).

Figura 34. Uma solução visual por sequência de imagens.





Do ponto de vista da Psicologia Cognitiva, representar soluções matemáticas com uso de imagens ou outras representações que não uma linguagem matemática formal deve ser preocupação constante dos professores, uma vez que o ser humano se organiza mentalmente por diferentes modos e essa diferença deve ser valorizada para o próprio enriquecimento de todos.

## Referências

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só)... Educação e Matemática, 8(4), p. 7-10, 1989.

BALDIN, Y. Y. O significado da introdução da metodologia japonesa de lesson study nos cursos de capacitação de professores de matemática no Brasil. In: XVIII Encontro Anual da SBPN e Simpósio Brasil-Japão, São Paulo. Anais... 2009.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CAMPOS, N. Q. O lesson study potencializando o ensino-aprendizagem de divisão: uma experiência no ensino médio. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

CYRINO, M. C. C. T.; CALDEIRA, J. S. Processos de negociação de significados sobre pensamento algébrico em uma comunidade de prática de formação inicial de professores de matemática. Investigações em Ensino de Ciências (online), v. 16, p. 373-401, 2011.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. (Org.). Ousadia criativa nas práticas de educadores matemáticos. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2015a.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. *Bolema. Boletim de Educação Matemática* (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 29, p. 1-17, 2015b.

FERNANDEZ, C.; YOSHIDA, M. Lesson Study: a japanese approach to improving mathematics teaching and learning. New Jersey, EUA: Autores Associados, 2004. p. 235.

FERREIRA, A. C. Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo. (Tese) Doutorado em Educação Matemática. Campinas, SP: FE/Unicamp, 2003.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2004, p. 47-76.

FUJII, T. Implementing japanese lesson study in foreign countries: misconceptions reviewed. *Mathematics Teacher Education and Development*, v. 16, n. 1, p. 2-18, 2014.

GAIGHER, V. R.; SOUZA, M. A. V. F. de.; WROBEL, J. S.; Planejamentos colaborativos e reflexivos de aulas baseadas em resolução de problemas verbais de matemática. *Vidya*, v. 37, n. 1, p. 51-73, 2017.

GIRALDO, V. Formação de Professores de Matemática: para uma Abordagem Problematizada. *Ciência e Cultura*, v. 70, p. 37-42, 2018.

GIRALDO, V. et al. Shared Teaching Practices: Integrating Experiential Knowledge into Pre-Service Mathematics Teachers. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM)*, v. 7, p. 4-23, 2017.

GIRALDO, V. et al. (Re)construindo saberes para o ensino a partir da prática: investigação de conceito e outras ideias. In: IV Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em aulas de matemática, 2017, Campinas. Anais... v. 1, p. 1-18.

GIRALDO, V. et al. Práticas docentes compartilhadas: integrando saberes emergentes da prática na formação inicial de professores de matemática. In: CIRYNO, Márcia (Org.). Temáticas emergentes de pesquisas sobre a formação de professores que ensinam matemática: desafios e perspectivas. São Paulo: SBEM, 2018. cap. 9. p. 1-2, 2018o.

HILL, H. C. et al. Measuring the Mathematical quality of instruction: learning mathematics for teaching project. *Journal for Mathematics Teacher Education*, v. 14, n. 1, p. 25-47, 2011.

HOFFMANN, S. R. A. Competência leitora e desempenho na resolução de problemas de matemática: um estudo de relações. 120 f. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.

IBIAPINA, I. M. L. M. Pesquisa colaborativa: investigação, formação e produção de conhecimento. Brasília-DF: Líder, 2008.

ISODA, M.; OLFOS, R. El enfoque de resolución de problemas: en la enseñanza de la Matemática a partir del estudio de classes. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso, 2009.

JOHNSON-LAIRD, N. P. *Mental models*. Cambridge: Harvard University Press, 1983.

KRUTETSKII, V. A. *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago: The University of Chicago Press, 1976.

LEITE, H. C. A.; PRANE, B. Z. D.; KUSTER, J. S. Erros de alunos do 6º ano e dificuldades de licenciandos na explicação do zero no quociente. In: Seminário internacional de pesquisa em educação matemática, 5, 2012, Petrópolis. Anais eletrônicos... Disponível em: [http://www.sbembrasil.org.br/files/v\\_sipem/](http://www.sbembrasil.org.br/files/v_sipem/)

PDFs/GT07/CC11865401765\_A.pdf. Acesso em: 14 jan. 2018.

MELLO, L. F. de. Formação do conceito de área e perímetro a partir de aulas baseadas no modelo Lesson Study. Dissertação (Mestrado) – Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

MISKULIN, R. G. S. et al. Pesquisas sobre trabalho colaborativo na formação de professores de matemática: um olhar sobre a produção do PRAPEM/UNICAMP. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.). Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática. São Paulo: Musa Editora, 2005, p. 196-219.

MURATA, A.; TAKAHASHI, A. Vehicle to connect theory, research and practice: how to teacher thinking changes in district-level Lesson study in Japan. Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of North American chapter of the international group of the Psychology of Mathematics Education, p. 1879-1888, 2002.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. An agenda for action. Reston, VA: NCTM, 1980.

ONUCHIC, L. de L. R. et al (Org.). Resolução de problemas: teoria e prática. São Paulo: Paco Editora, 2014.

POLYA, G. A arte de resolver problemas. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

PONTE, J. P. Gestão curricular em matemática. In: GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM, 2005. p. 11-31.

PONTE, J. P. Formação do professor de matemática: perspectivas atuais. In: PONTE, J. P. (Org.). Práticas profissionais dos professores de matemática. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. p. 343-360.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M.; MATA-PEREIRA, J.; BAPTISTA, M. Exercícios, problemas e explorações: perspectivas de profes-

ras num estudo de aula. *Quadrante*, v. 24, n. 2, p. 111-134, 2015.

SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, C.; SAIZ, I. *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto alegre: Artes Médicas, 1996.

STIGLER, J.; HIEBERT, J. *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press, 1998.

SCHOENFELD, A. *Mathematical problem solving*. Elsevier, 1985.

SCHOENFELD, A. Porquê toda essa agitação acerca da resolução de problemas? In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Ed.). *Investigar para aprender matemática*. Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996, p. 61-72.

SOUZA, M. A. V. F. de. *Solução de problemas: relações entre habilidade matemática, representação mental, desempenho e raciocínio dedutivo*. 204 f. Tese (Doutorado). Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 2007.

SOUZA, M. A. V. F. de. A produção de significados e a representação mental na solução de problemas mal-estruturados de matemática. *Boletim GEPEN (online)*, v. 1, p. 129-144, 2012.

SOUZA, M. A. V. F. de; GUIMARÃES, H. M. A formulação de problemas verbais de matemática: porquê e como. *Quadrante*, Lisboa, v. 24, n. 2, p. 135-162, 2015a.

SOUZA, M. A. V. F. de; GUIMARÃES, H. M. A resolução de problemas na educação em matemática: uma conversa sobre ensino, formação de professores e currículo desde Polya. *Ifes Ciência*, v. 1, n. 1, p. 109-136, 2015b.

SOUZA, M. A. V. F. de; SOUZA, S. F. de. Enunciados verbais de problemas de matemática e representações mentais: uma discussão. *Educação & Linguagem*, v. 19, n. 1, p. 205-221, 2016.

SOUZA, M. A. V. F. de; WROBEL, J. S. *Lesson Study*. 2018. Disponível em: <<https://youtu.be/uscwZBRkrGM>>. Acesso em: 06 fev. 2018.

SOUZA, M. A. V. F. de; WROBEL, J. S.; BALDIN, Y. Y. Lesson Study como meio para a formação inicial e continuada de professores de matemática – entrevista com Yuriko Yamamoto Baldin. Boletim GEPEM, no prelo.

SOUZA, M. A. V. F. de; WROBEL, J. S., GAIGHER, V. R. Quality Assessment of Instruction in Mathematics Problem Solving Classes: an evaluative instrument. *Ifes Ciência*, v. 3, p. 143-172, 2017.

STERNBERG, R. J. *Psicologia Cognitiva*. Porto Alegre, RS: Artes Médicas, 2010.

TAKAHASHI, A. Characteristics of Japanese mathematics lessons. *Tsukuba Journal of Educational Study in Mathematics*, v. 25, p.37-44, 2006.

TAKAHASHI, A.; McDOUGAL, T. Collaborative Lesson research: maximizing the impact of lesson study. *ZDM Mathematics Education*, v. 48, p. 513-526, 2016.

VANDENBOS, G. R. (Org.). *Dicionário de Psicologia da APA*. Porto Alegre: Artmed, 2010. p. 807.

WROBEL, J. S.; GAIGHER, V. R.; SOUZA, M. A. V. F.; LEITE, H. C. A. Inquiries in problem solving with contributions from lesson study. In: 40th PME Annual Conference. Szeged, Hungary. *Proceedings...* v.1, p. 341, 2016.

VIANA, José Paulo. *Desafios/9: problemas e histórias da matemática no público*. Porto, Portugal: Afrontamento, 2005. (Coleção Viva a Matemática).

VILLARREAL, M. E.; ESTELEY, C. B.; ALAGIA, H. R. As produções matemáticas de estudantes universitários ao estender modelos lineares a contextos não-lineares. *Bolema*, v. 18, n. 23, 2005.

Nota:

Todas as imagens e transcrições de áudios usados neste livro, bem como o uso do nome e imagem institucionais da Escola, Centro de Formação e Prefeitura foram devidamente autorizados por escrito.

## Posfácio

A Série *Lesson Study* em Matemática é uma iniciativa que vem contribuir sobremaneira à pesquisa da Educação Matemática no tema de Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática para a Educação Básica. A Metodologia de *Lesson Study* oferece um processo organizado para investigar a eficiência de uma aula, a partir da elaboração cuidadosa de uma proposta de aula, com objetivo primordial de estimular a aprendizagem dos alunos, para que a observação efetiva da execução do plano tenha objetividade suficiente para a reflexão posterior. A *Lesson Study* é uma metodologia de pesquisa que se adequa aos cursos de formação inicial e continuada, tornada popular por muitos grupos de pesquisa em contextos culturais diferentes no mundo atual.

Especialmente louvável é esta iniciativa das pesquisadoras do Grupo de Estudos do Ifes e Ufes, que junto com a comunidade escolar da região, está aprimorando os estudos desta metodologia, buscando seus significados originais para poder interpretá-los no contexto brasileiro, que enfrenta desafios contemporâneos de inovar e renovar as ações dos professores numa sala de

aula do Ensino Básico, às vistas das reformas curriculares que demandam mudanças.

A Série vem, portanto, ao encontro dos desafios enfrentados por cursos de licenciatura em Matemática, e dos programas de pós-graduação em Educação Matemática com linhas de pesquisa em Educação de Professores. Os livros da Série apresentam a motivação e a estrutura da *Lesson Study* como um eixo para as ações que norteiam a pesquisa de como desenvolver determinados temas do conteúdo curricular escolar por meio de Resolução de Problemas. A Resolução de Problemas é, por sua vez, a base fundamental das atividades propostas por *Lesson Study* no seu país original, Japão, e nos países que a adotaram como eixo central do desenvolvimento curricular, por exemplo, a Tailândia. Uma contribuição especial do livro é a referência ao papel da Resolução de Problemas no processo de desenvolvimento de raciocínio abstrato da matemática, analisado à luz das teorias de Psicologia Cognitiva, o que vem coadunar com pesquisas internacionais atuais sobre as implicações da Metodologia de *Lesson Study* na aprendizagem da Matemática, sob a perspectiva de desenvolvimento cognitivo.

O livro 2 trabalha a *Lesson Study* a partir do problema base Peixes para Contar e Estimar, um problema enunciado em texto literal que necessita de leitura, interpretação, compreensão dos dados, percepção do solicitado do problema que implica um raciocínio para a elaboração da estratégia. Os passos necessários na resolução, para que o ensino e a aprendizagem dos temas curriculares possam ser desenvolvidos com eficiência, estão assim presentes na proposta deste problema.

O esquema da *Lesson Study* em suas partes essenciais se apresenta neste livro, como resultado da pesquisa do Grupo de Estudos, percebendo-se o estágio do progresso da equipe na compreensão da metodologia, enquanto poderoso auxiliar pe-

dagógico para a melhoria das atividades dentro da sala de aula. No livro, os textos que se referem a esta fase de compreensão é valioso material em que, ao mesmo tempo que serve de modelo e exemplo para os seus potenciais leitores, mostra lacunas que se esperam sejam preenchidas nas próximas publicações, a fim de se aproximar do modelo completo de *Lesson Study* e potencializar os resultados já obtidos.

As lacunas não seriam aparentes, se não fosse a cuidadosa edição da pesquisa realizada; se não fossem as reflexões próprias da *Lesson Study*, elas não teriam sido percebidas, e, com certeza, irão estar completas na próxima edição. Como exemplo dessas lacunas podemos citar as falhas na interpretação de alguns termos técnicos dos pontos chave da *Lesson Study*, por exemplo *neriage* e, por conseguinte, a ausência de *matome*.

Sem prejuízo de apreciação deste trabalho, a leitura propiciou uma sugestão para a fase final da Resolução de Problemas, de validação e investigação da solução. Nela, poderia ter incluído uma análise de um comentário feito por uma professora na fase de estudo piloto e simulação entre os membros da equipe, de que precisaria repetir a coleta várias vezes. Como o problema tinha como objetivo curricular para o 8º ano, de levar à compreensão do raciocínio proporcional a partir dos dados e do obtido por uma segunda coleta para a contagem dos peixes, a resolução focou na constante de proporcionalidade para a solução, porém a ocasião é ainda propícia para estender a discussão com os alunos sobre conceitos como densidade da população dos peixes em relação ao aquário grande, número de coletas de dados e seus registros, análise de dados registrados em tabela para observar alguma tendência de estabilização para obter maior confiabilidade do valor de proporcionalidade. Algumas perguntas e/ou respostas registradas no livro mostram o aparecimento de raciocínios dos alunos nesta linha, que se

bem aproveitados, poderão significar muito desenvolvimento da aprendizagem de conteúdos no Ensino Médio, quando um raciocínio estatístico e probabilístico é um desafio. Tais discussões podem ser consideradas apropriadas para sessões de reflexão e análise pós-aula, uma fase importante da *Lesson Study* que permite a retomada do ciclo, em espiral, como entendem as autoras do livro.

Um diferencial deste livro em relação às práticas no Japão da *Lesson Study* é a proposta da Avaliação que atende às necessidades de melhoria na formação dos professores no contexto brasileiro. Esta contribuição junto à análise do papel da resolução de problemas na perspectiva da Psicologia Cognitiva torna esta publicação muito preciosa, recomendável como leitura para educadores e formadores de professores de Matemática, assim como aos professores em exercício que buscam aprimorar seus conhecimentos. Parabéns às autoras e todos participantes da equipe.

Profa Dra Yuriko Yamamoto Baldin  
Universidade Federal de São Carlos

## MINICURRÍCULO DAS AUTORAS

Maria Alice Veiga Ferreira de Souza é carioca, com pós-doutorado em Resolução de Problemas pela Universidade de Lisboa (2014), doutora em Psicologia da Educação Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (2007), mestre em Educação Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2001), licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (1995). É líder do Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística (Gepeme). É professora do Centro de Referência em Formação e em Educação a Distância do Instituto Federal do Espírito Santo desde 2008, onde trabalha, principalmente, na Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática. Tem interesse em ensino, pesquisa e extensão ligados à formação de professores que ensinam matemática, em resolução de problemas, *Lesson Study*, psicologia cognitiva ligada ao processo de pensamento matemático, aplicações estatísticas e matemáticas na área da Educação, Ciências, Matemática e Engenharias.



Julia Schaetzle Wrobel é carioca, doutora em Matemática Aplicada pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (2005), mestre em Matemática Aplicada pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2001), licenciada em Matemática pela



Universidade Estadual do Rio de Janeiro (1998). É professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo desde 2006, onde trabalha principalmente com a Licenciatura em Matemática. Foi coordenadora de Matemática do Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) na universidade até 2018. Tem interesse em questões relacionadas à formação de professores que ensinam matemática, em *Lesson Study* e em resolução de problemas.

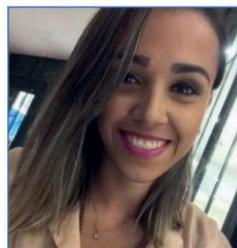
Hellen Castro Almeida Leite é capixaba, doutoranda em Psicologia da Educação pela Universidade Estadual de Campinas, membro do grupo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (PSIEM), mestre em Educação pela Universidade Federal do Espírito Santo – Ufes (2004), especialista em deficiência visual pelo MEC (2010), licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2003) e bacharel em Administração de Empresas pela Ufes (1996). É professora do Centro de Educação da Ufes desde 2006, onde trabalha principalmente com as Licenciaturas em Matemática e Pedagogia. Coordenou o Pibid Pedagogia da Ufes com ênfase em Ciências e Matemática para séries iniciais durante 5 anos. Atuou na educação básica e na EJA. Temas de interesse: solução de problemas na educação básica psicologia cognitiva ligada ao processo de pensamento matemático, formação de professores que ensinam matemática, *Lesson Study* e avaliação em larga escala.



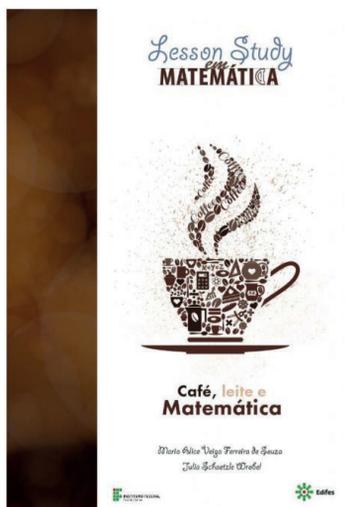
Bruna Zution Dalle Prane é capixaba, doutoranda e mestre (2015) em Educação pela Universidade Federal de São Carlos – (UFSCar), licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo (2010). Membro do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Cultura e do Grupos de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística (Gepeme). É professora do Instituto Federal do Espírito Santo, campus Vitória, desde de 2017. Temas de interesse: Modelagem Matemática na Educação Matemática, *Lesson Study*, ensino e aprendizagem de matemática.



Vanessa Ribeiro Gaigher é capixaba. Mestre em Educação em Ciências e Matemática (Educimat) pelo Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes, atuando nas linhas de pesquisa: Resolução de Problemas e Formação de Professores. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo – Ufes (2011). Tem experiência na educação básica atuando na área de Matemática. Atualmente é membro do Grupo de Estudos e Pesquisa em Modelagem Matemática e Educação Estatística (Gepeme). É professora efetiva da Secretaria Estadual de Educação do Espírito Santo. Tem interesse em questões relacionadas à formação de professores que ensinam matemática, em *Lesson Study* e em resolução de problemas.



Volume 1 da Série *Lesson Study* em Matemática:



Ebook disponível para download em [http://edifes.ifes.edu.br/images/stories/eBook-LessonStudy\\_em\\_Matematica\\_n1\\_Cafe-Leite-e-Matematica.pdf](http://edifes.ifes.edu.br/images/stories/eBook-LessonStudy_em_Matematica_n1_Cafe-Leite-e-Matematica.pdf)

---

---

Este livro foi composto com as famílias tipográficas  
Gentium Basic e Proza Libre.

---

---

